

## Глава 4. Дискретные сигналы и системы

### 4.1. Классификация сигналов и систем

Сигнал может быть определен как функция, переносящая информацию о состоянии или поведении физической системы. Сигнал может принимать форму колебаний, зависящих от времени или от пространственных координат, и представляться в виде функций одной или более независимых переменных. Так, например, речевой сигнал как функция времени, а изображение - как зависимость яркости от двух пространственных переменных. Обычно при математическом представлении сигнала  $s(t)$  независимой переменной считают время, и мы будем следовать этому, хотя на самом деле эта переменная может иметь другой смысл.

Независимая переменная сигнала может быть как непрерывной, так и дискретной. Сигналы в непрерывном времени определяются на континууме моментов времени и, следовательно, описываются функцией непрерывной переменной. Дискретные сигналы (сигналы в дискретном времени) определяются в дискретные моменты времени и представляются последовательностями чисел. На рис.4.1 графически отображены сигнал непрерывного времени и дискретный сигнал, образованный его эквидистантными выборками. Как мы увидим в дальнейшем, такие сигналы, как речь или изображение, могут быть представлены как с непрерывной, так и с дискретной независимой переменной, и если удовлетворяются определенные условия, эти представления полностью эквивалентны.

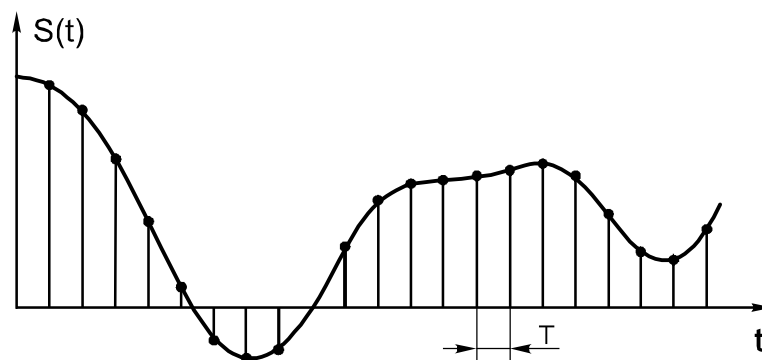


Рис.4.1. Сигналы непрерывного и дискретного времени

Вдобавок к тому, что независимые переменные могут быть непрерывными или дискретными, амплитуда сигнала также может быть как непрерывной, так и дискретной. Цифровые сигналы - это сигналы, у которых дискретны и время, и амплитуда. Сигналы в непрерывном времени и с непрерывным диапазоном амплитуд также называются аналоговыми сигналами.

Чтобы облегчить извлечение информации, сигналы должны подвергаться обработке, которая заключается в преобразовании сигнала в другой сигнал, являющийся более предпочтительным. Например, может понадобиться разделение двух или большего числа сигналов, которые ранее были объединены некоторым образом; выделение некоторой компоненты или параметра сигнала либо оценка одного или нескольких параметров сигнала.

Системы обработки сигналов могут классифицироваться точно так же, как и сами сигналы. Так, системы в непрерывном времени - это системы, у которых на входе и выходе имеются сигналы в непрерывном времени, а дискретные системы (системы в дискретном времени) - это системы, у которых на входе и выходе дискретные сигналы. Точно так же аналоговые системы - это системы с аналоговыми сигналами на входе и выходе, а цифровые системы - системы с цифровыми сигналами на входе и выходе. В таком случае цифровая обработка сигналов имеет дело с преобразованиями сигналов, являющимися дискретными как по амплитуде, так и по времени. Наш курс посвящен скорее дискретным, чем цифровым сигналам и системам. Эффекты, связанные с дискретизацией амплитуды, обычно рассматриваются особо.

Дискретные сигналы могут появляться при получении выборок из аналоговых сигналов или же они могут порождаться непосредственно некоторым дискретным во времени процессом. Вне зависимости от происхождения дискретных сигналов цифровые системы обработки таких сигналов обладают рядом полезных качеств. Они могут быть реализованы с большой гибкостью на универсальных цифровых вычислительных машинах или с помощью цифровой аппаратуры. При необходимости их можно использовать для моделирования аналоговых систем или, что более важно, для преобразований сигнала, которые невозможно осуществить на аналоговой аппаратуре. Поэтому, когда требуется сложная обработка сигналов, часто желательно представить их в цифровом виде.

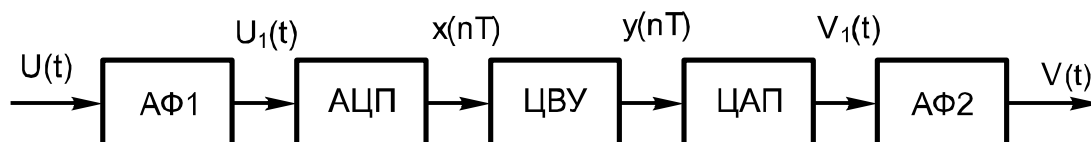


Рис.4.2. Блок-схема цифровой обработки аналогового сигнала

На рис.4.2 представлена блок-схема цифровой обработки аналогового сигнала, включающая в себя следующие блоки:

- АФ1 - аналоговый фильтр нижних частот, ограничивающий ширину спектра входного сигнала;
- АЦП - аналого-цифровой преобразователь, осуществляющий дискретизацию во времени и квантование по уровню временных отсчетов (выборки), т.е. представление их в форме последовательности двоичных чисел (цифровой сигнал  $x(nT)$ );
- ЦВУ - цифровое вычислительное устройство, выполняющее соответствующее преобразование сигнала  $x(nT)$  в цифровой сигнал  $y(nT)$ ;
- ЦАП - цифро-аналоговый преобразователь, выполняющий преобразование цифрового сигнала  $y(nT)$  в аналоговый ступенчатый сигнал  $V_1(t)$ ;
- АФ2 - аналоговый фильтр, преобразующий ступенчатый сигнал  $V_1(t)$  в сглаженный аналоговый  $V(t)$ .

В блок-схеме можно увидеть все упомянутые выше классы систем, в том числе аналоговую, дискретную и цифровую. На рис.4.3а графически отображена процедура преобразования аналогового сигнала сначала в дискретный (дискретизация по времени), затем в цифровой (квантование по уровню), образованный последовательностью десятичных цифр (рис.4.3б) и последовательностью двоичных кодовых групп (рис.4.3в). Рис.4.3г отображает график ошибки квантования, образованной разностью дискретного и квантованного сигналов.

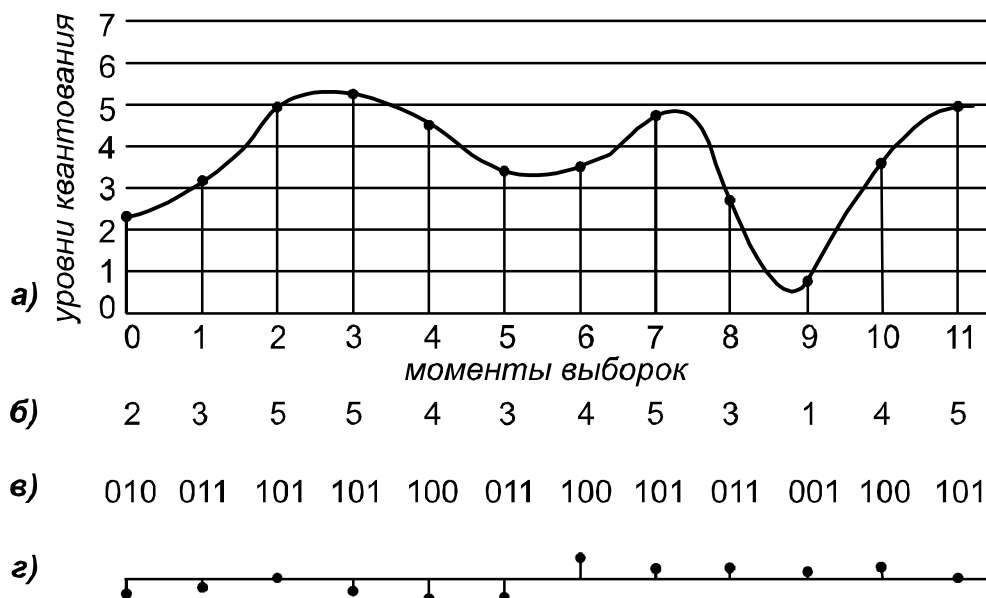


Рис.4.3. Преобразование аналогового сигнала в цифровой сигнал

В этом разделе мы рассмотрим основные понятия, связанные с одномерными дискретными сигналами и системами их обработки. Особое внимание уделим классу линейных дискретных систем, инвариантных относительно сдвига. Увидим, что свойства этих систем похожи на свойства линейных инвариантных во времени аналоговых систем. Действительно, последовательности можно трактовать как аналоговые импульсные сигналы. Однако во многих современных применениях цифровой обработки сигналов не все последовательности получаются путем выборки из непрерывных во времени сигналов. Кроме того, многие дискретные системы не являются просто аппроксимациями соответствующих аналоговых систем. Поэтому мы не будем пытаться применить выводы, следующие из теории для аналоговых систем, а получим их непосредственно для дискретных систем.

## 4.2. Дискретные сигналы (последовательности)

В теории дискретных систем мы будем интересоваться обработкой сигналов, представляемых последовательностями. Последовательность чисел  $x$ ,  $n$ -й член которой обозначается как  $x(n)$ , может быть формально записана в виде

$$x = \{x(n)\}, \quad -\infty < n < \infty. \quad (4.1)$$

Хотя последовательности не всегда получаются путем выборки из аналоговых колебаний, для удобства мы будем называть  $x(n)$  « $n$ -й выборкой» последовательности. Строго говоря,  $x(n)$  обозначает  $n$ -й член последовательности, запись (4.1) часто слишком громоздка и более удобно говорить о «последовательности  $x(n)$ ». Дискретные сигналы (последовательности) часто изображаются графически так, как это показано на рис. 4.4. Хотя абсцисса изображена в виде непрерывной линии, важно понимать, что  $x(n)$  определена только для целых значений  $n$ .

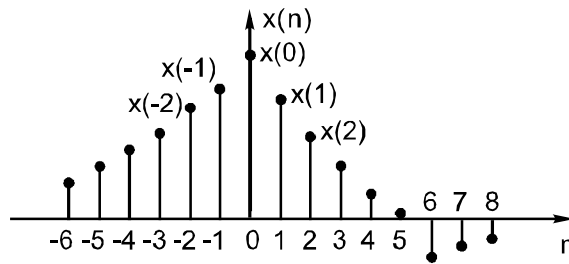


Рис. 4.4. Графическое представление дискретного сигнала

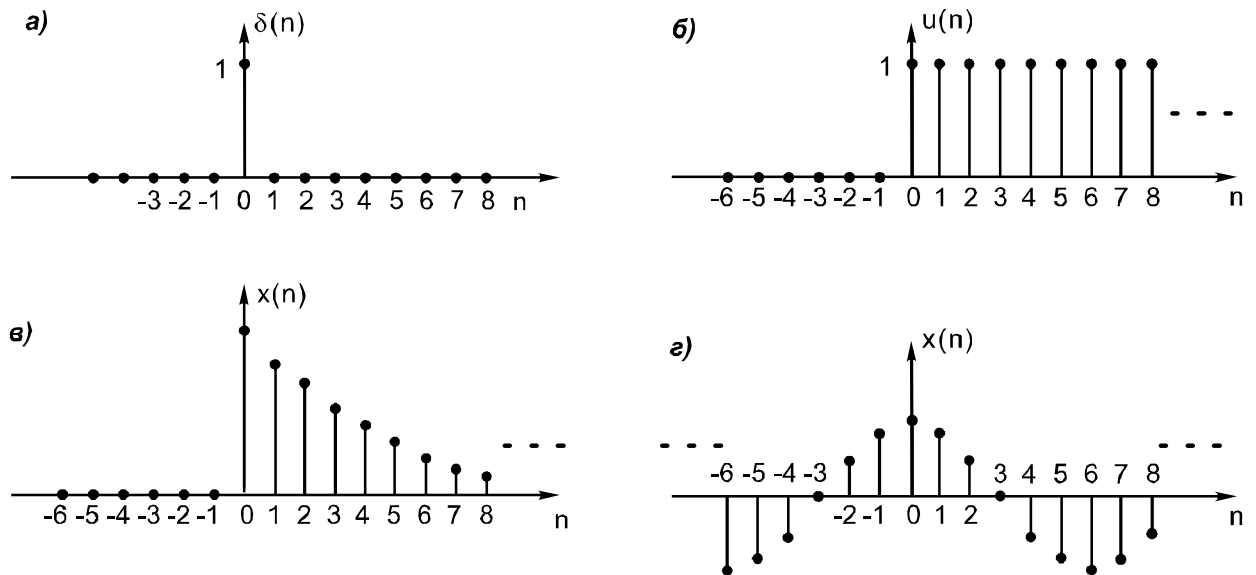


Рис.4.5. Примеры последовательностей:

- а) единичный импульс; б) единичная ступенчатая последовательность;
- в) действительная экспоненциальная последовательность; г) синусоидальная последовательность

Некоторые примеры последовательностей, играющих важную роль при дискретной обработке, показаны на рис. 4.5.

Единичный импульс  $d(n)$  определяется как последовательность со значениями

$$d(n) = \begin{cases} 1, & n = 0; \\ 0, & n \neq 0. \end{cases}$$

Как мы увидим, единичный импульс играет для дискретных сигналов и систем ту же роль, какую играет дельта-функция для аналоговых сигналов и систем. Для удобства единичный импульс часто называется просто импульсом.

Единичная ступенчатая последовательность  $u(n)$  имеет значения  $u(n) = \begin{cases} 1, & n \geq 0, \\ 0, & n < 0 \end{cases}$  и

связана с единичным импульсом соотношением

$$u(n) = \sum_{k=0}^{\infty} d(n-k) = \sum_{k=-\infty}^n d(k). \tag{4.2}$$

Соответственно единичный импульс связан с единичной ступенчатой последовательностью соотношением

$$d(n) = u(n) - u(n-1). \tag{4.3}$$

Действительная экспоненциальная последовательность - это последовательность со значениями вида

$$x(n) = Aa^n, \quad (4.4)$$

где  $A$  и  $a$  — действительные числа. Эту последовательность можно, например, получить периодическим (с периодом  $T$ ) взятием отсчетов (выборок) экспоненты непрерывного времени  $x(n) = Ae^{-at}|_{t=nT} = Ae^{-anT} = Aa^n$ , где  $a = e^{-aT}$ . Если  $0 < a < 1$  и  $A$  положительное, то значения последовательности положительные и уменьшаются с ростом  $n$ , как это представлено на рис.1.5в. Если  $-1 < a < 0$ , то значения последовательности будут знакопеременными и также уменьшаются по величине с ростом  $n$ . При  $|a| > 1$  последовательности будут возрастающими с увеличением  $n$ .

Синусоидальная последовательность имеет вид  $x(n) = A \cos(w_0 n + j)$ , и ее также можно получить периодическим (с периодом  $T$ ) взятием отсчетов (выборок) синусоиды непрерывного времени

$$x(n) = A \cos(\Omega_0 t + j)|_{t=nT} = A \cos(\Omega_0 n T + j) = A \cos(w_0 n + j),$$

где  $w_0 = \Omega_0 T$ .

Экспоненциальная последовательность  $Aa^n$  с комплексной  $a$  имеет реальную и мнимую части, представляющие экспоненциально взвешенные синусоиды. В частности, если  $a = |a|e^{jw_0}$  и  $A = |A|e^{j\theta}$ , то последовательность  $Aa^n$  может быть представлена любой из следующих форм:

$$\begin{aligned} x(n) &= Aa^n = |A|e^{j\theta} |a|^n e^{jw_0 n} = |A||a|^n e^{j(w_0 n + \theta)} = \\ &= |A||a|^n \cos(w_0 n + \theta) + j|A||a|^n \sin(w_0 n + \theta). \end{aligned} \quad (4.5)$$

При  $|a| = 1$  последовательность называется комплексной экспоненциальной и имеет форму:

$$x(n) = |A|e^{j(w_0 n + \theta)} = |A| \cos(w_0 n + \theta) + j|A| \sin(w_0 n + \theta), \quad (4.6)$$

т.е. ее реальная и мнимая части изменяются синусоидально с изменением  $n$ . По аналогии с непрерывно-временными сигналами величину  $w_0$  называют частотой комплексной синусоиды или комплексной экспоненты, а  $\theta$  - фазой. Тот факт, что  $n$  всегда целое в (4.6), приводит к ряду важных отличий в свойствах дискретно-временных и непрерывно-временных комплексных экспонент и синусоид.

Последовательность  $x(n)$  по определению называется периодической с периодом  $N$ , если  $x(n) = x(n + N)$  для всех  $n$ . Комплексная экспонента и синусоидальная последовательность имеют период  $2\pi/w_0$  только тогда, когда это действительное число является целым. Если  $2\pi/w_0$  не целое, но рациональное число, то синусоидальная последовательность будет периодической, однако с периодом, большим  $2\pi/w_0$ . Если  $2\pi/w_0$  не рационально, то синусоидальная и комплексная экспоненциальная последовательности вовсе не будут периодическими. Параметр  $w_0$  будет называться *цифровой частотой* синусоиды или комплексной экспоненты вне зависимости от того, периодичны они или нет. Частота может быть выбрана в любом непрерывном диапазоне значений. Однако без потери общности можно ограничить этот диапазон, полагая  $0 \leq w_0 \leq 2\pi$  (или  $-\pi \leq w_0 \leq \pi$ ), так как синусоидальные и комплексные экспоненциальные последовательности, получаемые при изменении  $w_0$  в диапазоне  $2\pi k \leq w_0 \leq 2\pi(k+1)$  в точности совпадают при любых целых  $k$  с последовательностями, получаемыми при изменении  $w_0$  в диапазоне  $0 \leq w_0 \leq 2\pi$ .

Сформулированные выше утверждения легко подтвердить следующими соотношениями. Периодичность комплексной экспоненты с периодом  $2\pi$  как функции цифровой частоты:

$$e^{j(w_0+2pk)n} = e^{jw_0n} e^{j(2pk)n} = e^{jw_0n}, \quad (4.7)$$

где  $k$  - целое. Действительно, комплексные экспоненты и, следовательно, дискретно-временные синусоиды с частотами  $\omega_0$  и  $\omega_0 + 2\pi k$  неразличимы.

Если целое число  $N$  является периодом дискретно-временной синусоиды как функции целочисленной переменной  $n$ , то справедливо соотношение

$$A \cos(w_0n + j) = A \cos(w_0n + w_0N + j), \quad (4.8)$$

которое требует, чтобы

$$w_0N = 2\pi k, \quad (4.9)$$

где  $k$  - целое.

Следовательно, величина  $2\pi/\omega_0$  не всегда является периодом комплексной экспоненты и дискретно-временной синусоиды с частотой  $\omega_0$ . Заметим, что непрерывно-временные синусоиды с частотой  $\Omega_0$  всегда периодичны во времени с периодом  $T_0 = 2\pi/\Omega_0$ .

#### Пример 4.1

Рассмотрим сигнал  $x_1(n) = \cos(pn/4)$ . Этот сигнал имеет период равный  $N=8$ , что легко проверить, поскольку

$$x(n+8) = \cos(p(n+8)/4) = \cos(pn/4 + 2p) = \cos(pn/4) = x(n).$$

Рассмотрим теперь сигнал с более высокой частотой  $x_2(n) = \cos(3pn/8)$ . Период этого сигнала оказывается равным  $N=16$ , т.е. увеличение частоты с  $2\pi/8$  до  $3\pi/8$  увеличивает и период последовательности. Это противоречит нашим представлениям о связи частоты и периода, которые должны выполняться для непрерывно-временных синусоид. Понятно, что это противоречие следует из того факта, что синусоидальная последовательность есть функция целочисленной переменной. Как мы уже отмечали, по этой же причине некоторые синусоидальные последовательности могут быть непериодическими. Например, для последовательности  $x_3(n) = \cos(n)$  не найдется целого числа  $N$  такого, чтобы удовлетворить условию периодичности  $x_3(n) = x_3(n+N)$  для всех  $n$ .

И еще один вывод следует из приведенных выше соотношений. Совокупность комплексных экспонент с частотами  $w_k = 2\pi k/N, k = 0, 1, \dots, N-1$  образуют полный набор из  $N$  различающихся последовательностей с периодом равным  $N$ . Эти свойства комплексных экспоненциальных и синусоидальных последовательностей являются основными в теории и практике построения алгоритмов дискретно-временного анализа Фурье.

Наконец, отметим различия в интерпретации понятий высокие и низкие частоты для непрерывно-временных и дискретно-временных синусоид. Непрерывно-временная синусоида  $A \cos(\Omega_0 t + j)$  осциллирует тем быстрее, чем выше ее частота  $\Omega_0$ . Дискретно-временная синусоида  $A \cos(w_0 n + j)$  осциллирует тем быстрее, чем выше ее частота  $w_0$ , при изменении от  $w_0 = 0$  до  $w_0 = \pi$ . Однако, когда частота изменяется от  $w_0 = \pi$  до  $w_0 = 2\pi$  осцилляции становятся медленнее. Это отображено на рис.1.6. Действительно, в силу периодичности по параметру цифровая частота ( $w_0$ ) комплексные и синусоидальные последовательности, частоты которых расположены в окрестности  $w_0 = 2\pi$ , совпадают с теми, частоты которых расположены в окрестности  $w_0 = 0$ . Следовательно, комплексные и синусоидальные последовательности, частоты которых расположены в окрестности  $w_0 = 2\pi k$  для целых  $k$ , обычно называются низкочастотными (относительно медленно осциллирующими), а для частот в окрестности  $w_0 = \pi + 2\pi k$  для целых  $k$ , -

высокочастотными (относительно быстро осциллирующими).

При анализе систем обработки дискретных сигналов приходится производить ряд преобразований последовательностей. Так, произведение и сумма двух последовательностей  $x$  и  $y$  определяются как произведение и сумма выборок соответственно:  $xy = \{x(n)y(n)\}$ ,  $x + y = \{x(n) + y(n)\}$ . Умножение последовательности  $x$  на число  $a$  определяется как  $xa = \{ax(n)\}$ .

Говорят, что последовательность  $y$  является задержанной или сдвинутой последовательностью  $x$ , если  $y(n)$  имеет значения  $y(n) = x(n - n_0)$ , где  $n_0$  — целое число.

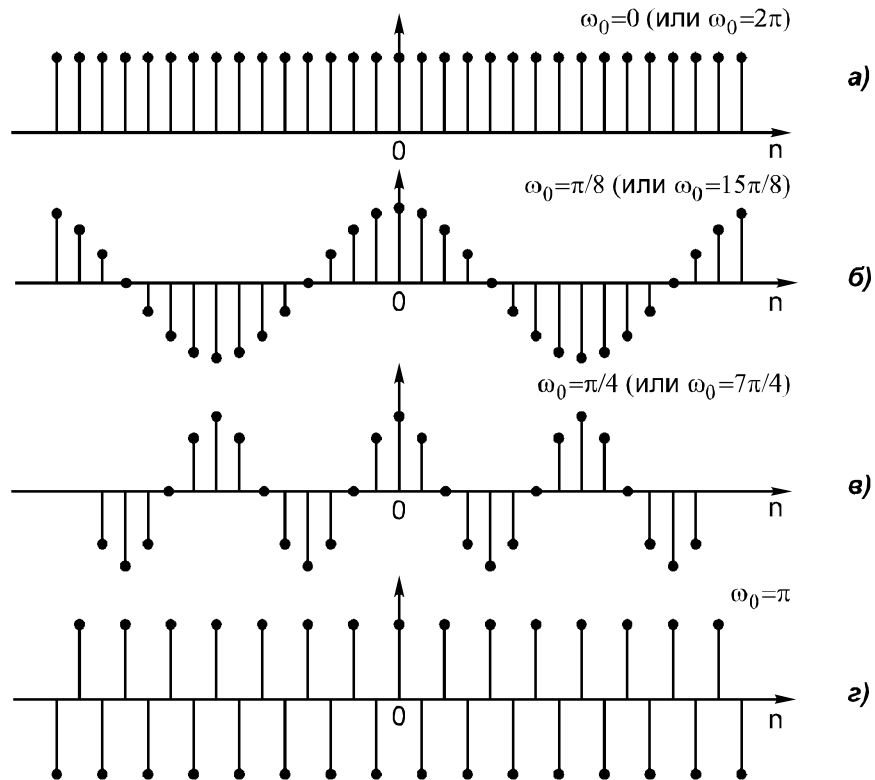


Рис.4.6. Синусоидальные последовательности  $\cos(\omega_0 n)$  для различных значений  $\omega_0$ : а)  $\omega_0=0$  и  $\omega_0=2\pi$ ; б)  $\omega_0 =\pi/8$  и  $\omega_0 =15\pi/8$ ; в)  $\omega_0 =\pi/4$  и  $\omega_0 =7\pi/4$ ; г)  $\omega_0 =\pi$

Произвольная последовательность может быть представлена как сумма взвешенных и задержанных единичных импульсов. Например, последовательность  $p(n)$ , изображенную на рис. 4.7, можно записать как

$$p(n) = a(-3)d(n+3) + a(1)d(n-1) + a(2)d(n-2) + a(7)d(n-7) .$$

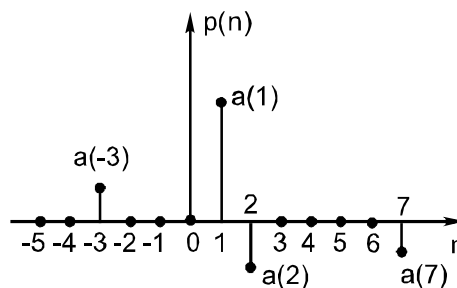


Рис. 4.7. Пример последовательности, представляющей сумму взвешенных и задержанных единичных импульсов

В общем случае произвольная последовательность записывается в виде

$$x(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)d(n-k). \quad (4.10)$$

### 4.3. Дискретные линейные системы с постоянными параметрами (инвариантные к сдвигу)

Система определяется математически как однозначное преобразование или оператор, отображающий входную последовательность (сигнал)  $x(n)$  в выходную последовательность (отклик или реакцию системы)  $y(n)$ , что математически записывается в виде  $y(n) = T[x(n)]$ , а графически часто изображается так, как показано на рис. 4.8.

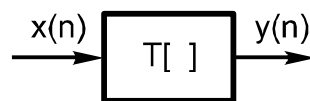


Рис. 4.8. Представление преобразования, отображающего входную последовательность  $x(n)$  в выходную последовательность  $y(n)$

#### Пример 4.2

Идеальная система задержки определяется уравнением

$$y(n) = x(n - n_3), \quad -\infty \leq n \leq \infty,$$

где  $n_3$  – целое положительное число, называемое задержкой системы. Эта система осуществляет просто временной сдвиг входной последовательности вправо на  $n_3$  отсчетов при формировании выходной последовательности. Если  $n_3$  – целое отрицательное число, то система сдвигает входную последовательность на  $|n_3|$  отсчетов влево (опережающий сдвиг).

Классы дискретных систем определяются путем наложения ограничений на преобразование  $T[ ]$ . Так система называется *системой без памяти*, если ее выход  $y(n)$  в момент  $n$  определяется входом  $x(n)$  в тот же момент  $n$ . Примером является система, для которой вход  $x(n)$  и выход  $y(n)$  связаны соотношением:

$$y(n) = [x(n)]^2$$

для каждого значения  $n$ .

В дальнейшем будет широко рассматриваться класс линейных инвариантных относительно сдвига систем, потому что они сравнительно просты в математическом отношении, и дают удобный вид обработки сигналов.

Класс *линейных систем* определяется справедливостью для них принципа суперпозиции. Если  $y_1(n)$  и  $y_2(n)$  – отклики на  $x_1(n)$  и  $x_2(n)$  соответственно, то система линейна тогда и только тогда, когда

$$T[ax_1(n) + bx_2(n)] = aT[x_1(n)] + bT[x_2(n)] = ay_1(n) + by_2(n) \quad (4.11)$$

для произвольных постоянных  $a$  и  $b$ . Мы видели, что произвольная последовательность  $x(n)$  может быть представлена в виде задержанной и взвешенной суммы единичных импульсов (4.4). Это представление вместе с (4.11) предполагает, что линейная система может быть полностью описана откликом на единичный импульс — импульсной

характеристикой. А именно, пусть  $h_k(n)$  - отклик системы на  $d(n-k)$  единичный импульс в момент  $n=k$ . Тогда из (4.4)

$$y(n) = T \left[ \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) d(n-k) \right].$$

С учетом (4.11) можно записать

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) T[d(n-k)] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) h_k(n). \quad (4.12)$$

Таким образом, согласно (4.12) реакцию системы можно выразить через отклики на  $d(n-k)$ . Если накладывається только одно условие — линейность, то  $h_k(n)$  будет зависеть как от  $n$ , так и от  $k$ , и в этом случае польза от выражения (4.12) для вычислений невелика. Более полезный результат получится, если введем дополнительное ограничение, состоящее в инвариантности к сдвигу.

Класс *инвариантных к сдвигу систем* характеризуется следующим свойством: если  $y(n)$  – отклик на  $x(n)$ , то  $y(n-k)$  будет откликом на  $x(n-k)$ , где  $k$  – положительное или отрицательное целое число. Когда индекс  $n$  связывается со временем, свойству инвариантности к сдвигу соответствует свойство инвариантности во времени. Поэтому такие системы в дальнейшем будем называть *дискретными линейными системами с постоянными во времени параметрами* (ДЛПП). К таким системам применяют еще термин *стационарные системы*. Из свойства инвариантности к сдвигу следует, что если  $h(n)$  – отклик на  $d(n)$ , то откликом на  $d(n-k)$  будет просто  $h(n-k)$ . Поэтому (4.12) принимает вид

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) h(n-k). \quad (4.13)$$

Значит, любая инвариантная к сдвигу система полностью характеризуется импульсной характеристикой  $h(n)$ . Выражение (4.13) обычно называется сверткой. Если  $y(n)$  – последовательность, значения которой связаны со значениями двух последовательностей  $h(n)$  и  $x(n)$  выражением (4.13), то мы говорим, что  $y(n)$  есть свертка  $x(n)$  с  $h(n)$ , и обозначаем  $y(n) = x(n) * h(n)$ . Заменяя переменную в (4.13), получим другое выражение

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k) x(n-k) = h(n) * x(n). \quad (4.14)$$

Поэтому порядок, в котором две последовательности входят в свертку, не важен. Другими словами, линейная инвариантная к сдвигу система со входом  $x(n)$  и импульсной характеристикой  $h(n)$  будет иметь тот же выход, что и линейная инвариантная к сдвигу система со входом  $h(n)$  и импульсной характеристикой  $x(n)$ .

### Пример 4.3

Рассмотрим систему, для которой соотношение между входом и выходом имеет вид

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^n x(k), \quad (4.15)$$

называемую *накопителем* (аккумулятором), поскольку значение выхода в момент  $n$  определяется суммой входных отсчетов в этот и все предшествующие моменты времени. Покажем, что накопитель – линейная система, т.е. для нее справедлив принцип

суперпозиции. Определим два входных сигнала  $x_1(n)$  и  $x_2(n)$  и соответствующие им выходные сигналы

$$y_1(n) = \sum_{k=-\infty}^n x_1(k),$$

$$y_2(n) = \sum_{k=-\infty}^n x_2(k).$$

Найдем отклик системы на входной сигнал  $x_3(n) = ax_1(n) + bx_2(n)$ :

$$\begin{aligned} y_3(n) &= \sum_{k=-\infty}^n x_3(k) = \sum_{k=-\infty}^n [ax_1(k) + bx_2(k)] = a \sum_{k=-\infty}^n x_1(k) + b \sum_{k=-\infty}^n x_2(k) = \\ &= ay_1(n) + by_2(n). \end{aligned}$$

Полученный результат подтверждает справедливость для накопительной системы принципа суперпозиции и, следовательно, ее линейность. Покажем, что это инвариантная к сдвигу во времени система. Для сигнала  $x_1(n) = x(n - n_0)$  найдем отклик  $y_1(n)$ , сравним с  $y(n - n_0)$  и удостоверимся, что они эквивалентны. Так,

$$y(n - n_0) = \sum_{k=-\infty}^{n-n_0} x(k).$$

Далее найдем

$$y_1(n) = \sum_{k=-\infty}^n x_1(k) = \sum_{k=-\infty}^n x(k - n_0) = \sum_{k_1=-\infty}^{n-n_0} x(k_1) = y(n - n_0).$$

Таким образом, накопитель есть линейная система с постоянными во времени параметрами.

Две линейные инвариантные к сдвигу системы, включенные каскадно, образуют линейную инвариантную к сдвигу систему с импульсной характеристикой, равной свертке импульсных характеристик исходных систем. Так как порядок в свертке не важен, то импульсная характеристика составной системы не зависит от порядка, в котором включены исходные системы. Это свойство иллюстрируется рис. 4.9, где изображены три системы, имеющие одинаковые импульсные характеристики.

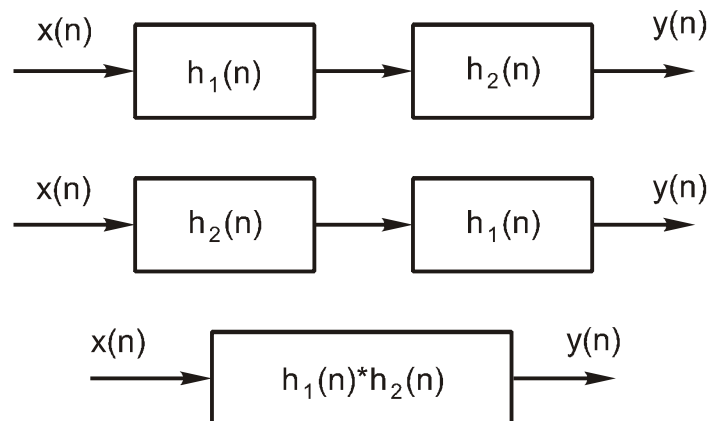


Рис. 4.9. Три линейные инвариантные к сдвигу системы с одинаковыми импульсными характеристиками

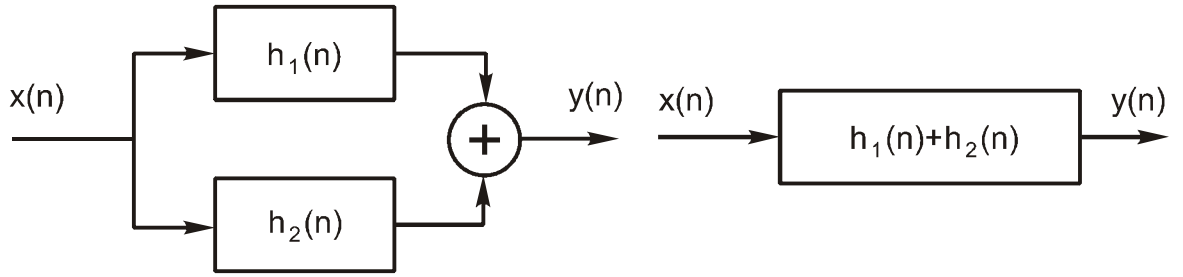


Рис.4.10. Параллельное включение линейных инвариантных к сдвигу систем и эквивалентная система

Из (4.10) и (4.11) следует, что две инвариантные к сдвигу системы, включенные параллельно, эквивалентны одной системе с импульсной характеристикой, равной сумме импульсных характеристик исходных систем. Это свойство иллюстрируется рис. 4.10.

Хотя выражение свертки в виде суммы аналогично интегралу свертки в теории линейных аналоговых систем, следует подчеркнуть, что свертку в виде суммы нельзя понимать как приближение к интегралу свертки. В противоположность интегралу свертки, играющему в основном теоретическую роль в применении к аналоговым линейным системам, свертка в виде суммы, как мы увидим в дальнейшем, вдобавок к своей теоретической значимости может служить алгоритмом реализации дискретной системы. Поэтому важно глубже понять свойства свертки и получить опыт в применении свертки для вычислений.

#### Пример 4.4

Рассмотрим систему с импульсной характеристикой 
$$h(n) = \begin{cases} a^n, & n \geq 0; \\ 0, & n < 0, \end{cases}$$

или, что то же,  $h(n) = a^n u(n)$ . Чтобы найти реакцию на входной сигнал  $x(n) = n(n) - u(n-N)$  заметим, что в силу (4.10) для получения  $n$ -го значения выходной последовательности нужно сформировать произведение  $x(k)h(n-k)$  и просуммировать значения получившейся последовательности.

Две составляющие последовательности показаны на рис. 4.11 как функции  $k$ , причем  $h(n-k)$  изображена для нескольких значений  $n$ . Как видно из рис. 4.11 при  $n < 0$   $h(n-k)$  и  $x(k)$  не имеют ненулевых перекрывающихся выборок и, следовательно,  $y(n) = 0$  при  $n < 0$ . При  $0 < n < N$   $h(n-k)$  и  $x(k)$  имеют ненулевые перекрывающиеся выборки от  $k = 0$  до  $k = n$ ,  $k$  поэтому при  $0 \leq n < N - 1$

$$y(n) = \sum_{k=0}^n a^{n-k} = a^n [(1 - a^{-(n+1)}) / (1 - a^{-1})] = (1 - a^{n+1}) / (1 - a), 0 \leq n < N;$$

при  $N - 1 \leq n$  ненулевые перекрывающиеся выборки простираются от  $k = 0$  до  $k = N - 1$  и поэтому

$$y(n) = \sum_{k=0}^{N-1} a^{n-k} = a^n [(1 - a^{-N}) / (1 - a^{-1})], n \geq N.$$

Напомним общую формулу для вычисления суммы членов геометрической прогрессии:

$$\sum_{k=N_1}^{N_2} a^k = \frac{a^{N_1} - a^{N_2+1}}{1-a}, \quad N_2 \geq N_1, \quad (4.16)$$

которая использована для вычисления сумм, образующих выходной отклик  $y(n)$ .

Реакция  $y(n)$  изображена на рис. 4.12.

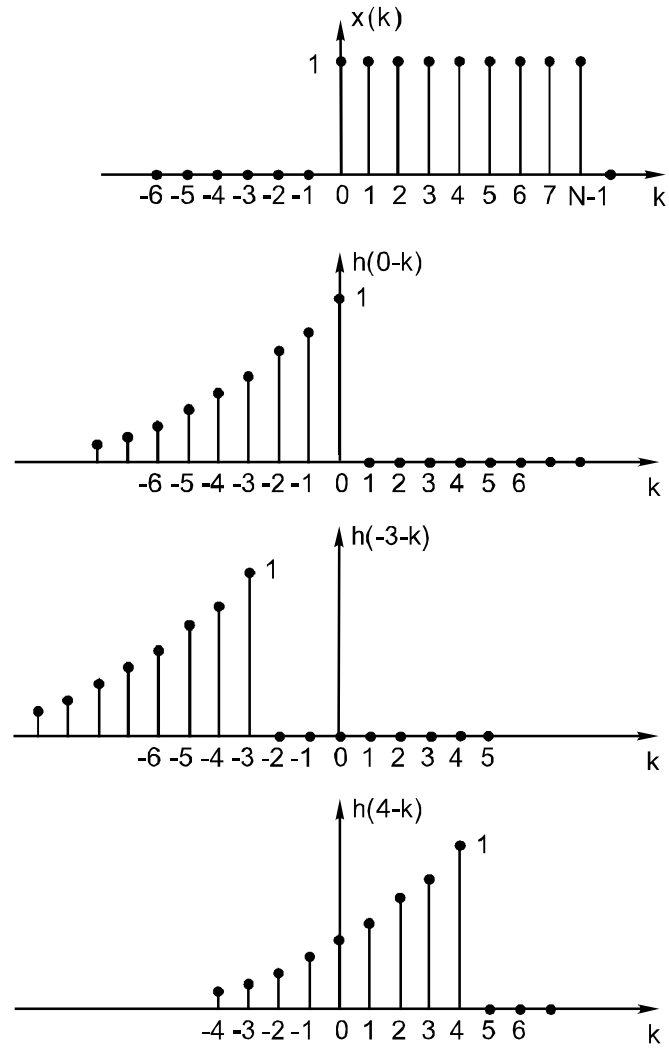


Рис. 4.11. Последовательности, входящие в свертку  $[h(n-k)]$ , показаны для нескольких значений  $n$

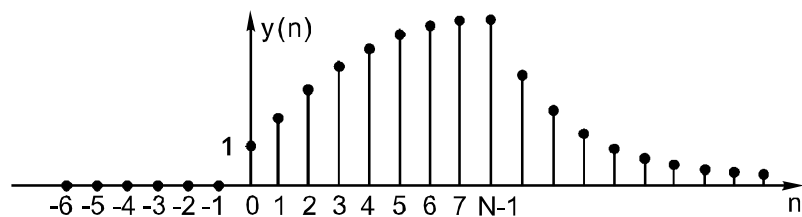


Рис. 4.12. Реакция системы с импульсной характеристикой  $h(n) = a^n u(n)$  на входной сигнал  $u(n) - u(n - N)$

#### 4.4. Устойчивость и физическая реализуемость

Мы видели, что требования линейности и инвариантности во времени определяют класс систем, которые представляются сверткой. Добавочные ограничения устойчивости и физической реализуемости определяют практически важный, но более узкий класс линейных инвариантных во времени систем.

*Устойчивой системой* назовем систему, в которой каждый ограниченный входной сигнал создает ограниченный выходной сигнал. Линейная инвариантная к сдвигу система устойчива тогда и только тогда, когда

$$S = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h(k)| < \infty. \quad (4.17)$$

Это можно показать следующим образом. Если (4.17) справедливо и  $x(n)$  ограничен, т.е.  $|x(n)| < M$  для всех  $n$ , то из (1.13) следует

$$|y(n)| = \left| \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)x(n-k) \right| \leq M \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h(k)| < \infty.$$

Поэтому  $y(n)$  ограничен. Доказать обратное можно, показав, что если  $S = \infty$ , то существует ограниченный входной сигнал, который создает неограниченный выходной сигнал. Таким входом является последовательность со значениями

$$x(n) = \begin{cases} 1, & h(-n) \geq 0; \\ -1, & h(-n) < 0. \end{cases}$$

Ясно, что  $x(n)$  ограничена. Значение на выходе при  $n = 0$  равно

$$y(0) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(-k) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h(-k)| = \sum_{m=-\infty}^{\infty} |h(m)| = S.$$

Поэтому при  $S = \infty$  выходная последовательность не ограничена.

*Физически реализуемая система* – это система, у которой изменения на выходе не опережают изменения на входе, т.е. в физически реализуемой системе, если  $x_1(n) = x_2(n)$ ,  $n < n_0$ , то  $y_1(n) = y_2(n)$ ,  $n < n_0$ . Другими словами, это система, для которой справедливы причинно-следственные соотношения, т.е. следствие не появляется раньше причины. Для таких систем используют термин *каузальная* (от английского *causal* – причинный).

Линейная инвариантная к сдвигу система физически реализуема тогда и только тогда, когда ее импульсная характеристика как реакция на единичный импульс, поданный в нулевой момент, равна нулю при  $n < 0$ . Поэтому иногда удобно называть последовательность, которая равна нулю при  $n < 0$ , физически реализуемой последовательностью, подразумевая под этим, что она может быть импульсной характеристикой физически реализуемой системы.

#### Пример 4.5

Рассмотрим линейную инвариантную к сдвигу систему с импульсной характеристикой  $h(n) = a^n u(n)$ . Поскольку эта импульсная характеристика равна нулю при  $n < 0$ , то система физически реализуема. Чтобы определить устойчивость, мы должны вычислить сумму

$$S = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h(k)| = \sum_{k=0}^{\infty} |a|^k.$$

При  $|a| < 1$ , бесконечная геометрическая прогрессия имеет сумму  $S = \frac{1}{1-|a|} < \infty$ , при  $|a| > 1$  соответствующая сумма будет бесконечной. Следовательно, система устойчива только при  $|a| < 1$ .

#### 4.5. Линейные разностные уравнения с постоянными коэффициентами

Во многих применениях важную роль играет один подкласс класса линейных инвариантных к сдвигу систем. Это подкласс состоит из систем, для которых вход  $x(n)$  и выход  $y(n)$  удовлетворяют линейному разностному уравнению  $N$ -го порядка с постоянными коэффициентами вида

$$\sum_{k=0}^N a(k)y(n-k) = \sum_{k=0}^M b(k)x(n-k). \quad (4.18)$$

В общем случае системы этого класса не обязательно должны быть физически реализуемыми. Например, рассмотрим разностное уравнение первого порядка

$$y(n) - ay(n-1) = x(n). \quad (4.19)$$

Легко проверить прямой подстановкой, что при  $x(n) = d(n)$  уравнению (4.19) удовлетворяют как  $y(n) = a^n u(n)$ , так и  $y(n) = -a^n u(-n-1)$ . Первое решение соответствует физически реализуемому и при  $|a| < 1$  устойчивому фильтру. Второе решение физически нереализуемо и устойчиво только при  $|a| > 1$ . Общепринято полагать, что такое разностное уравнение, как (4.18), характеризует физически реализуемую систему, и мы будем придерживаться этого положения, если только не будет оговорено противоположное.

Без добавочной информации разностное уравнение вида (4.18) неоднозначно определяет соотношение между входом и выходом системы. Это является следствием того, что разностным уравнениям, как и дифференциальным, удовлетворяет целое семейство решений. Например, если разностному уравнению (4.19) удовлетворяет  $y_1(n)$  при  $x(n) = x_1(n)$ , то ему также удовлетворяет решение вида  $y(n) = y_1(n) + ka^n$ , где  $k$  — произвольная постоянная. В общем случае к любому решению (4.18) можно прибавить составляющую, удовлетворяющую однородному разностному уравнению (правая часть которого равна нулю), и эта сумма также будет удовлетворять (4.18). Так, решение однородного уравнения  $\sum_{k=0}^N a(k)y(n-k) = 0$  или реакция при нулевом входном

воздействию имеет вид  $y(n) = \sum_{k=1}^N A_k z_k^n$ , где  $z_k$  – совокупность простых корней

характеристического уравнения  $\sum_{k=0}^N a(k)z^{-k} = 0$ . Коэффициенты  $A_k$  определяются

начальными условиями. При  $|z_k| < 1$  система будет устойчивой. Для кратных корней характеристического уравнения решение записывается иначе.

Система, удовлетворяющая линейному разностному уравнению с постоянными коэффициентами, будет инвариантна к сдвигу только тогда, когда мы соответствующим образом выберем однородную составляющую. Если, например, система физически реализуема, мы должны выбрать начальные условия так, чтобы если  $x(n) = 0$  при  $n < n_0$ , то и  $y(n) = 0$  при  $n < n_0$  (назовем их *условиями начального покоя*). Мы будем полагать, что если система удовлетворяет линейному разностному уравнению с постоянными коэффициентами, то она также удовлетворяет всем необходимым для линейности, инвариантности к сдвигу и физической реализуемости условиям до тех пор, пока не оговорено противоположное.

Если мы предположим, что система физически реализуема, то тогда линейное разностное уравнение дает явное соотношение между входом и выходом. Это соотношение можно получить, переписывая (4.18) в виде

$$y(n) = -\sum_{k=1}^N (a(k)/a(0))y(n-k) + \sum_{k=0}^M (b(k)/a(0))x(n-k). \quad (4.20)$$

Таким образом,  $n$ -е значение выхода можно вычислить, зная  $n$ -е значение входа и соответственно  $N$  и  $M$  прошлых значений выхода и входа. При известном входе  $x(n)$  и наборе дополнительных величин, например,  $y(-1), y(-2), \dots, y(-N)$ , из (4.20) можно определить  $y(0)$ . Затем, зная  $y(0), y(-1), y(-2), \dots, y(-N+1)$ , определяется  $y(1)$  и так далее. Когда используется такая процедура, говорят о *рекурсивном* вычислении  $y(n)$ . Как и в случае свертки, разностное уравнение не только дает теоретическое описание системы, но может быть также основой для реализации системы.

#### Пример 4.6

Разностное уравнение первого порядка (4.19) дает рекуррентную формулу  $y(n) = ay(n-1) + x(n)$ . Чтобы получить импульсную характеристику, положим  $x(n) = d(n)$  при нулевых начальных условиях  $y(-1) = 0$ . Тогда

$$h(n) = 0, n < 0;$$

$$h(0) = ah(-1) + 1 = 1;$$

$$h(1) = ah(0) = a;$$

⋮

$$h(n) = ah(n-1) = a^n.$$

Таким образом,  $h(n) = a^n u(n)$ .

Чтобы получить другое решение, положим  $x(n) = d(n)$  и  $y(n) = 0$  при  $n > 0$ . Из (4.19) можно записать рекуррентное соотношение  $y(n-1) = (1/a)[y(n) - x(n)]$  или  $y(n) = (1/a)[y(n+1) - x(n+1)]$ .

Тогда

$$h(n) = 0, n > 0;$$

$$h(0) = (1/a)[h(1) - x(1)] = 0;$$

$$\begin{aligned}
h(-1) &= (1/a)[h(0) - x(0)] = -a^{-1}; \\
h(-2) &= (1/a)[h(-1) - x(-1)] = -a^{-2}; \\
&\vdots \\
h(n) &= (1/a)h(n+1) = -a^n.
\end{aligned}$$

Таким образом,  $h(n) = -a^n u(-n-1)$ .

Аналогичные вычисления выходного отклика  $y(n)$  при  $x(n) = Kd(n)$  и  $y(-1) = c$  приводят к соотношению

$$y(n) = ca^{n+1} + Ka^n u(n), \quad (4.21)$$

справедливому для всех  $n$ .

Некоторые важные моменты иллюстрируются решением (4.21) примера 4.6. Это решение получено рекурсивным вычислением выхода в положительном и отрицательном направлениях, начиная с  $n = -1$ . Очевидно, что эта процедура некаузальная. Заметим также, что при  $K = 0$ , т.е. при нулевом входе выход системы равен  $y(n) = ca^{n+1}$ . Следовательно, такая система нелинейна, поскольку для линейной системы выходной сигнал должен быть равным нулю при входном нулевом для всех  $n$ . При  $x_1(n) = Kd(n - n_0)$  выход равен

$$y_1(n) = ca^{n+1} + Ka^{n-n_0} u(n - n_0),$$

поэтому система не инвариантна во времени. Если система находится в начальном состоянии покоя, т.е.  $y(-1) = 0$ , то она будет линейной, инвариантной во времени и каузальной. При этом выходной сигнал будет равен

$$y(n) = Ka^n u(n).$$

В общем случае линейная система, инвариантная к сдвигу, может иметь импульсную характеристику как конечной, так и бесконечной длительности. В силу определенных свойств цифровой обработки сигналов полезно различать эти два случая. Будем называть системы с конечной импульсной характеристикой коротко КИХ-системами, а системы с бесконечной импульсной характеристикой – БИХ-системами. Если в (4.18) положить  $N=0$ , так что

$$y(n) = (1/a(0)) \left[ \sum_{k=0}^M b(k)x(n-k) \right],$$

тогда оно соответствует КИХ-системе. Действительно, сравнение с (4.13) показывает, что это разностное уравнение совпадает со сверткой и, следовательно,

$$h(n) = \begin{cases} (b(n)/a(0)), & n = 0, 1, \dots, M; \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Система с конечной импульсной характеристикой всегда может быть описана разностным уравнением вида (4.18) с  $N=0$ . В противоположность этому для БИХ-системы  $N$  должно быть больше нуля.

#### 4.6. Представление дискретных сигналов и систем в частотной области

В предыдущих разделах мы показали, что для ДЛПД систем представление входной последовательности в виде взвешенной суммы задержанных единичных импульсов приводит к представлению выхода в виде взвешенной суммы задержанных

импульсных характеристик. Дискретные сигналы могут быть представлены различными способами, причем, особо важную роль для дискретных сигналов и систем играют синусоидальные и комплексные экспоненциальные последовательности. Это объясняется тем, что основное свойство ДЛПП систем состоит в том, что в установившемся состоянии отклик на синусоидальный входной сигнал является синусоидой той же частоты с амплитудой и фазой, определяемыми системой. Именно это свойство ДЛПП систем делает представление сигналов через синусоиды и комплексные экспоненты таким полезным.

Чтобы убедиться в справедливости этого для ДЛПП систем, предположим, что входная последовательность является комплексной экспонентой круговой частоты  $\omega$ , т.е.  $x(n) = e^{j\omega n}$  для  $-\infty < n < \infty$ . Тогда, используя (4.13), получим выходной сигнал

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)e^{j\omega(n-k)} = e^{j\omega n} \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)e^{-j\omega k}.$$

Если ввести

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)e^{-j\omega k}, \quad (4.22)$$

то можно записать

$$y(n) = H(e^{j\omega})e^{j\omega n}. \quad (4.23)$$

Следовательно, комплексная экспонента сохраняет свою форму на выходе системы, т.е. является собственной функцией ДЛПП системы, а  $H(e^{j\omega})$  – собственное значение описывает изменение комплексной амплитуды комплексной экспоненты как функции частоты  $\omega$ . Величина  $H(e^{j\omega})$  называется *частотной характеристикой* системы, у которой импульсная характеристика равна  $h(n)$ . В общем случае  $H(e^{j\omega})$  – комплексная функция и может быть выражена через свои действительную и мнимую части  $H(e^{j\omega}) = H_{\text{Re}}(e^{j\omega}) + jH_{\text{Im}}(e^{j\omega})$  или через модуль и аргумент (фазу)  $H(e^{j\omega}) = |H(e^{j\omega})|e^{j\arg H(\cdot)}$ . Зависимость модуля  $|H(e^{j\omega})|$  от частоты называют *амплитудно-частотной характеристикой* (АЧХ) системы, а зависимость аргумента  $\arg H(e^{j\omega})$  от частоты – *фазо-частотной характеристикой* (ФЧХ) системы.

Поскольку синусоиду можно представить как линейную комбинацию комплексных экспонент, то частотная характеристика также выражает отклик на синусоидальный сигнал. А именно, рассмотрим

$$x(n) = A \cos(\omega_0 n + \Phi) = (A/2)e^{j\Phi}e^{j\omega_0 n} + (A/2)e^{-j\Phi}e^{-j\omega_0 n}.$$

Из (4.23) отклик на  $(A/2)e^{j\Phi}e^{j\omega_0 n}$  равен

$$y_1(n) = H(e^{j\omega_0})(A/2)e^{j\Phi}e^{j\omega_0 n}.$$

Если  $h(n)$  – действительная функция, то из (4.23) отклик на  $(A/2)e^{-j\Phi}e^{-j\omega_0 n}$  является комплексно-сопряженным с откликом на  $(A/2)e^{j\Phi}e^{j\omega_0 n}$ . Поэтому результирующий отклик равен

$$\begin{aligned} y(n) &= (A/2)[H(e^{j\omega_0})e^{j\Phi}e^{j\omega_0 n} + H(e^{-j\omega_0})e^{-j\Phi}e^{-j\omega_0 n}] = \\ &= (A/2)\left|H(e^{j\omega_0})\right| [e^{j[\omega_0 n + \Phi + q]} + e^{-j[\omega_0 n + \Phi + q]}] = \\ &= \text{Re}\{H(e^{j\omega_0})Ae^{j\Phi}e^{j\omega_0 n}\} = A\left|H(e^{j\omega_0})\right| \cos(\omega_0 n + \Phi + q), \end{aligned}$$

где  $q = \arg[H(e^{j\omega_0})]$  – значение фазо-частотной характеристики системы на частоте  $\omega_0$ .

Таким образом, АЧХ отображает изменение амплитуды синусоиды, а ФЧХ – сдвиг ее фазы при прохождении через ДЛПП систему.

Частотная характеристика  $H(e^{j\omega})$  является непрерывной функцией частоты. Кроме того, это периодическая функция частоты  $\omega$  с периодом  $2\pi$ . Это свойство следует непосредственно из (4.22), так как  $e^{j(\omega+2\pi)k} = e^{j\omega k}$ . То, что частотная характеристика имеет одинаковые значения на частотах  $\omega$  и  $\omega+2\pi$ , означает, что система реагирует одинаково на комплексные экспоненты этих двух частот. Такое поведение понятно, поскольку эти две экспоненциальные последовательности совпадают друг с другом.

*Пример 4.7*

В качестве примера расчета частотной характеристики рассмотрим систему с импульсной характеристикой (рис. 4.13):

$$h(n) = \begin{cases} 1/N, & 0 \leq n \leq N-1; \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases} \quad (4.24)$$

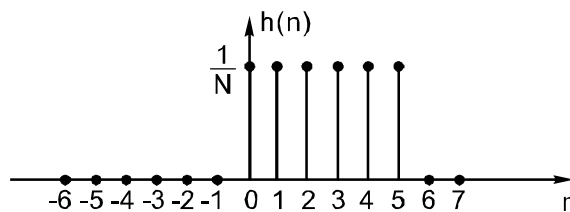


Рис.1.13

Заметим, что такой КИХ-фильтр может быть описан разностным уравнением

$$y(n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} x(n-k),$$

из которого следует, что выход фильтра в любой момент времени есть среднее арифметическое  $N$  предшествующих значений входного сигнала, включая текущее, поэтому такой фильтр называют *фильтром скользящего среднего*.

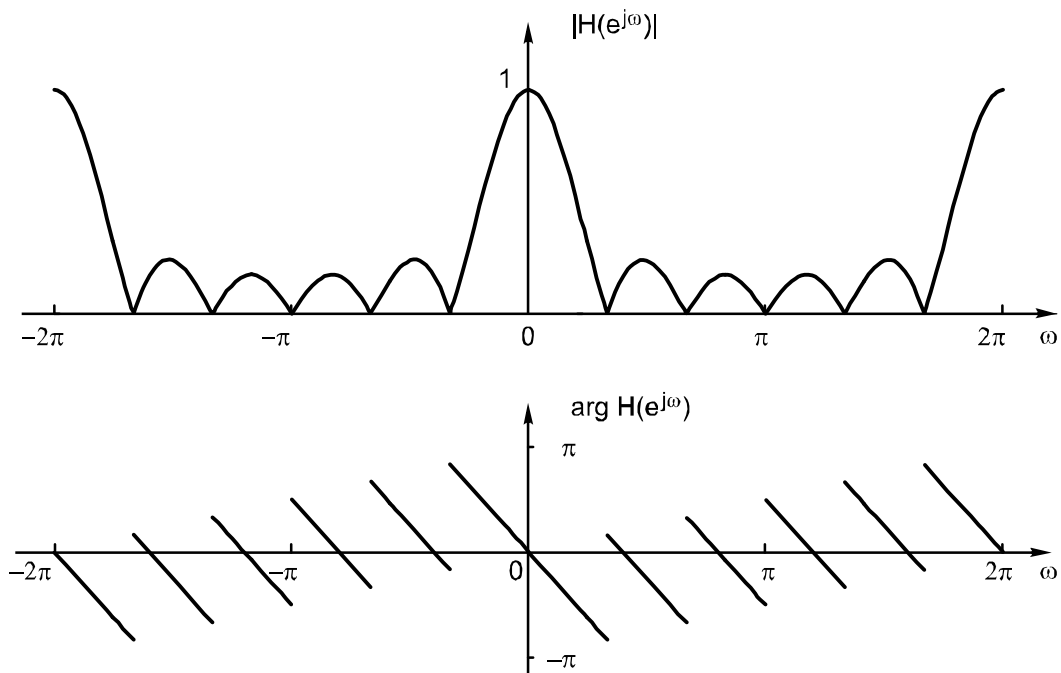


Рис. 4.14. Модуль и фаза частотной характеристики системы с импульсной характеристикой, изображенной на рис. 4.13

Частотная характеристика равна

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} e^{-j\omega n} = \frac{1 - e^{-j\omega N}}{N(1 - e^{-j\omega})} = \frac{\sin(\omega N/2)}{N \sin(\omega/2)} e^{-j(N-1)\omega/2}. \quad (4.25)$$

Модуль и фаза  $H(e^{j\omega})$  изображены на рис. 4.14 для случая  $N=6$ . Понятно, что это фильтр нижних частот, который подавляет высокочастотные компоненты спектра входного сигнала.

Поскольку  $H(e^{j\omega})$  - периодическая функция частоты, она может быть представлена в виде ряда Фурье. Фактически (4.22) и представляет  $H(e^{j\omega})$  в виде ряда Фурье, в котором коэффициентами Фурье являются значения импульсной характеристики  $h(n)$ . Отсюда следует, что  $h(n)$  могут быть определены через  $H(e^{j\omega})$  как коэффициенты Фурье периодической функции т. е.

$$h(n) = (1/2\pi) \int_{-\pi}^{\pi} H(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega, \quad (4.26)$$

где

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n) e^{-j\omega n}. \quad (4.27)$$

Эти равенства можно также трактовать как представление последовательности  $h(n)$ . А именно, полезно рассматривать (4.26) как представление последовательности  $h(n)$  в виде суперпозиции (интеграла) экспоненциальных сигналов, комплексные амплитуды которых определяются выражением (4.27). Таким образом, (4.26) и (4.27) являются парой преобразований Фурье для последовательности  $h(n)$ , где (4.27) играет роль прямого, а (4.26) - обратного преобразования Фурье, которое существует только тогда, когда ряд в (4.27) сходится.

Представление последовательности преобразованием (4.27) не ограничивается только импульсной характеристикой системы и будет справедливо для любой последовательности при условии, что ряд в (4.27) сходится. Поэтому для произвольной последовательности  $x(n)$  мы определим *преобразование Фурье дискретного времени* (ДВПФ) соотношением

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-j\omega n}, \quad (4.28)$$

а обратное преобразование Фурье — соотношением

$$x(n) = (1/2\pi) \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega, \quad (4.29)$$

Ряды (4.28) не всегда сходятся, как, например, в случаях, когда  $x(n)$  - единичная ступенчатая последовательность либо действительная или комплексная экспоненциальная последовательность для всех  $n$ .

Возможность представления последовательности как суперпозиции комплексных экспонент является очень важным качеством при анализе линейных систем с постоянными параметрами. Именно вследствие этого факта и принципа суперпозиции реакция такой системы на комплексную экспоненту полностью определяется частотной характеристикой  $H(e^{j\omega})$ . Если рассматривать (4.29) как суперпозицию комплексных экспонент бесконечно малой амплитуды, то отклик линейной системы с постоянными параметрами на  $x(n)$  является суперпозицией откликов на каждую экспоненту, входящую в представление сигнала  $x(n)$ . Поскольку отклик на каждую комплексную экспоненту

получается умножением на  $H(e^{j\omega})$ , то

$$y(n) = T[x(n)] = T[(1/2p) \int_{-p}^p X(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega] = (1/2p) \int_{-p}^p X(e^{j\omega}) T[e^{j\omega n}] d\omega =$$

$$= (1/2p) \int_{-p}^p H(e^{j\omega}) X(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega.$$

Поэтому преобразование Фурье выходного сигнала равно

$$Y(e^{j\omega}) = H(e^{j\omega}) X(e^{j\omega}). \quad (4.30)$$

Этот результат может быть, конечно, получен путем применения преобразования Фурье к

свертке  $y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(n-k)$ . Цель наших рассуждений состояла в том, чтобы показать,

что (1.30) является прямым следствием свойств линейных систем с постоянными параметрами.

#### Пример 4.8

Идеальный фильтр нижних частот с дискретным временем имеет частотную характеристику  $H(e^{j\omega})$ , вида (рис.4.15)

$$H(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1, & |\omega| \leq \omega_{cp}; \\ 0, & \omega_{cp} < |\omega| \leq p. \end{cases}$$

Поскольку  $H(e^{j\omega})$  является периодической функцией, то это соотношение определяет частотную характеристику для всех  $\omega$ . Такая система удаляет из входного сигнала все компоненты в диапазоне частот  $\omega_{cp} < |\omega| \leq p$ . Импульсная характеристика  $h(n)$  определяется по (4.22):

$$h(n) = (1/2p) \int_{-\omega_{cp}}^{\omega_{cp}} e^{j\omega n} d\omega = \sin(\omega_{cp}n) / pn$$

и показана на рис.4.16 для  $\omega_{cp} = \pi/2$ .

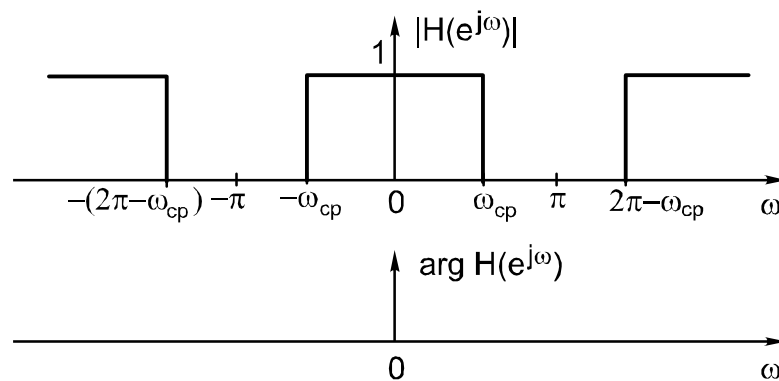


Рис. 4.15. Частотная характеристика идеального дискретного фильтра нижних частот

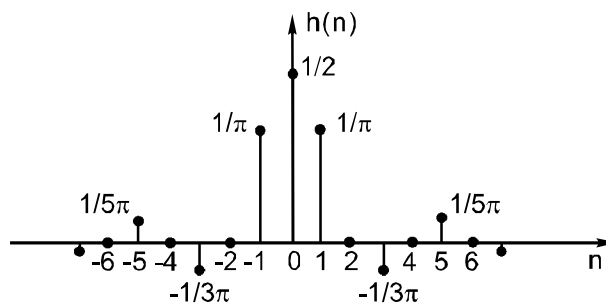


Рис. 4.16. Импульсная характеристика идеального фильтра нижних частот с частотой среза  $\omega_{cp}=\pi/2$

Идеальный фильтр нижних частот является примером системы, которая очень эффективно описывается в частотной области. Легко видеть, что эта система полностью удаляет из входного сигнала компоненты с частотой выше частоты среза  $\omega_{cp}$ . Ясно, что идеальный фильтр нижних частот не является физически реализуемой системой, более того, можно показать, что он не является устойчивым. Тем не менее, теоретически этот фильтр является очень важным, и мы рассмотрим методы построения систем, близких к идеальному фильтру низких частот.

В заключение приведем некоторые наиболее важные свойства ДВПФ, которые сведены в табл. 4.1.

Таблица 4.1

Некоторые важные свойства ДВПФ

Последовательность	ДВПФ
$x(n)$	$X(e^{jw})$
$x(n - m)$	$X(e^{-jwm})$
$x(n)e^{jw_0n}$	$X(e^{j(w-w_0)})$
$\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(n - k)$	$X(e^{jw})H(e^{jw})$
$x(n)y(n)$	$\frac{1}{2p} \int_{-p}^p X(e^{jq})Y(e^{j(w-q)})dq$

#### 4.7. Дискретизация сигналов с непрерывным временем

В предыдущих разделах мы старались не сопоставлять дискретные сигналы и системы с аналоговыми сигналами и системами, за исключением указаний на сходство некоторых основных теоретических понятий. Однако часто дискретные сигналы получаются из аналоговых сигналов с помощью периодической дискретизации, поэтому важно понять, как последовательности, полученные таким образом, связаны с исходным сигналом.

Рассмотрим аналоговый сигнал  $x(t)$ , имеющий спектр - преобразование Фурье (НВПФ)  $X(j\Omega)$ :

$$x(t) = (1/2p) \int_{-\infty}^{\infty} X(j\Omega)e^{j\Omega t} d\Omega; \quad (4.31)$$

$$X(j\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\Omega t} dt. \quad (4.32)$$

Говорят, что последовательность  $x(n)$  со значениями  $x(n) = x(nT) = x(t)|_{t=nT}$  получена из  $x(t)$  периодической дискретизацией, а  $T$  называется *периодом дискретизации*. Величина обратная  $T$  называется *частотой дискретизации*  $F_\delta = 1/T$  или *скоростью дискретизации*. Чтобы определить, в каком смысле  $x(n)$  представляет исходный сигнал  $x(t)$ , удобно связать  $X(j\Omega)$  - преобразование Фурье аналогового сигнала  $x(t)$  с  $X(e^{j\Omega T})$  - преобразованием Фурье последовательности  $x(n)$ . Для последовательности  $x(n)$  пару ДВПФ (4.28) и (4.29) запишем в виде

$$x(n) = (T/2p) \int_{-p/T}^{p/T} X(e^{j\Omega T}) e^{j\Omega nT} d\Omega, \quad (4.33)$$

$$X(e^{j\Omega T}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-j\Omega nT}. \quad (4.34)$$

Идеализированную процедуру периодической дискретизации аналогового сигнала  $x(t)$  представим в виде импульсного сигнала непрерывного времени  $x_\delta(t)$

$$x_\delta(t) = x(t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} d(t-nT) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT) d(t-nT),$$

который содержит только отсчеты  $x(n) = x(nT)$ . Преобразование Фурье  $X_\delta(j\Omega)$  сигнала  $x_\delta(t)$  равно

$$\begin{aligned} X_\delta(j\Omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT) d(t-nT) e^{-j\Omega t} dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT) \int_{-\infty}^{\infty} d(t-nT) e^{-j\Omega t} dt = \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT) e^{-j\Omega nT} = X(e^{j\Omega T}) \end{aligned}$$

и, очевидно, совпадает с ДВПФ  $X(e^{j\Omega T})$  последовательности  $x(n)$ . Поэтому  $X(e^{j\Omega T})$  можно выразить в виде свертки преобразований Фурье сомножителей  $x(t)$  и

$\sum_{n=-\infty}^{\infty} d(t-nT)$ , образующих  $x_\delta(t)$ . Учитывая, что преобразование Фурье сигнала

$\sum_{n=-\infty}^{\infty} d(t-nT)$  есть периодическая с периодом  $\Omega_\delta = 2p/T$  последовательность дельта-

функций частоты, равная  $\Omega_\delta \sum_{m=-\infty}^{\infty} d(\Omega - m\Omega_\delta)$ , свертка примет вид:

$$\begin{aligned} X(e^{j\Omega T}) &= \frac{\Omega_\delta}{2p} \int_{-\infty}^{\infty} X[j(\Omega - n)] \sum_{n=-\infty}^{\infty} d(n - n\Omega_\delta) dn = \\ &= \frac{\Omega_\delta}{2p} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} X[j(\Omega - n)] d(n - n\Omega_\delta) dn = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} X[j(\Omega - n\Omega_\delta)]. \end{aligned} \quad (1.35)$$

Из соотношения (1.35) следует, что ДВПФ последовательности  $x(n)$  представляет собой периодически с периодом  $\Omega_\delta$  размноженное по оси частот преобразование Фурье (НВПФ) сигнала непрерывного времени  $x(t)$ . Графическое отображение сигналов и их спектров представлено на рис.4.17. Если спектр  $X(j\Omega)$  аналогового сигнала имеет ограниченную локализацию по оси частот, например в диапазоне частот  $-\Omega_\delta \leq \Omega \leq \Omega_\delta$  ( $\Omega_\delta = 2pF_\delta$  - верхняя частота спектра), как это представлено на рис.4.17а, то спектр

$X(e^{j\Omega T})$  дискретизованного сигнала при выполнении условия  $\Omega_c < p/T$  ( $F_\delta > 2F_c$ ) будет иметь вид, представленный на рис.4.17б, когда соседние спектральные полосы не перекрываются. Если период дискретизации выбран слишком большим,  $\Omega_c > p/T$  ( $F_\delta < 2F_c$ ), то в спектре  $X(e^{j\Omega T})$  дискретизованного сигнала будет иметь место перекрытие соседних спектральных полос (*эффект наложения спектров*) (см. рис.4.17в). Из рис.4.17б и соотношения (4.35) видно, что при частоте дискретизации, по крайней мере, вдвое большей верхней частоты спектра  $X(j\Omega)$  ( $F_\delta \geq 2F_c$ ), справедливо соотношение

$$X(e^{j\Omega T}) = (1/T)X(j\Omega), \quad -p/T \leq \Omega \leq p/T, \quad (4.36)$$

т.е. спектр  $X(e^{j\Omega T})$  совпадает со спектром  $X(j\Omega)$  и, следовательно, по дискретной последовательности  $x(n)$  можно восстановить исходный аналоговый сигнал  $x(t)$ .

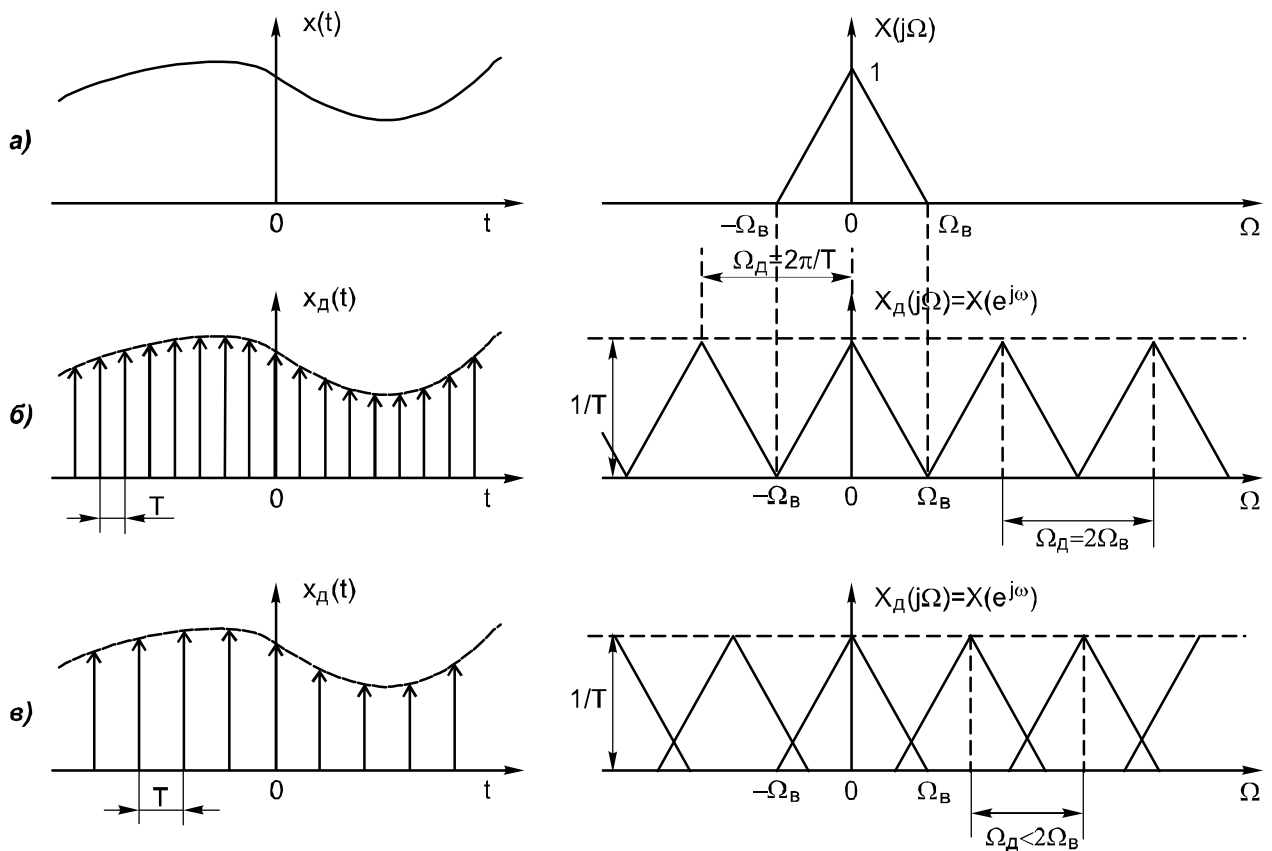


Рис.4.17. Аналоговый сигнал и его преобразование Фурье (а), дискретный сигнал, полученный при периодической дискретизации и его преобразование Фурье; период дискретизации мал настолько, что периодически повторяющиеся преобразования Фурье аналогового сигнала не перекрываются (б); период дискретизации велик и поэтому периодически повторяющиеся преобразования Фурье аналогового сигнала перекрываются(в)

Это утверждение составляет содержание так называемой *теоремы отсчетов* (в отечественной литературе часто именуемой теоремой Котельникова). Общепринятая формулировка теоремы отсчетов такова: произвольный сигнал непрерывного времени, спектр которого не содержит частот выше  $F_c$ , может быть полностью восстановлен, если известны отсчеты этого сигнала, взятые через равные промежутки времени  $T$ , удовлетворяющие соотношению  $T \leq 1/2F_c$ .

Сделаем замечание относительно выбора шкалы частот при спектральных

представлениях дискретных последовательностей. В соотношениях (4.33) и (4.34), соответствующих паре ДВПФ, мы использовали аналоговые частоты  $W$ , измеряемые в радианах/секунду. Аналоговые частоты  $F$ , измеряемые в герцах (1/с), определяются как  $F = \Omega / 2\pi$ . В соотношениях (4.28) и (4.29) для ДВПФ использовались *цифровые частоты*  $w = \Omega T = \Omega / F_0$ , измеряемые в радианах, которые можно трактовать как аналоговые, нормированные к частоте дискретизации. В дальнейшем в основном будем использовать именно цифровые частоты  $w$  вместе с цифровыми безразмерными частотами  $f = w / 2\pi = F / F_0$ . Переход от цифровых частот к аналоговым осуществляется домножением на частоту дискретизации.

Найдем интерполяционную формулу для восстановления  $x(t)$  по  $x(n)$ . Учитывая соотношения (4.31), (4.34) и (4.36) получим

$$\begin{aligned} x(t) &= (1/2\pi) \int_{-\infty}^{\infty} X(j\Omega) e^{j\Omega t} d\Omega = (T/2\pi) \int_{-p/T}^{p/T} X(e^{j\Omega T}) e^{j\Omega t} d\Omega = \\ &= (T/2\pi) \int_{-p/T}^{p/T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-j\Omega n T} e^{j\Omega t} d\Omega = \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) (T/2\pi) \int_{-p/T}^{p/T} e^{j\Omega(t-nT)} d\Omega = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) \frac{\sin[(p/T)(t-nT)]}{(p/T)(t-nT)}. \end{aligned} \quad (4.37)$$

Представление аналогового сигнала в виде (4.37) справедливо только для функций с ограниченным спектром при достаточно малом  $T$ , т. е. отсутствии эффекта наложения. Если  $\Omega_g > p/T$  ( $F_0 < 2F_g$ ), из-за наложения спектров восстановление аналогового сигнала без искажений невозможно. Заметим, что техническая реализация операции восстановления аналогового сигнала по его отсчетам может быть выполнена пропуская импульсный сигнал  $x_0(t)$  через идеальный фильтр нижних частот, пропускающий без искажений полосу частот  $-p/T \leq \Omega \leq p/T$ . Эта процедура представлена на рис.4.18.

При дискретизации аналоговых видеосигналов с неограниченным спектром  $X(j\Omega) \neq 0, |\Omega| > \Omega_g$ , можно уменьшить влияние эффекта наложения спектров, если аналоговый сигнал перед подачей на устройство дискретизации (АЦП) пропустить через фильтр нижних частот (ФНЧ) с целью ограничения его спектра диапазоном частот  $|\Omega| < p/T$ . При этом останутся лишь искажения, связанные с отбрасыванием хвостов спектра. Эта процедура низкочастотной фильтрации целесообразна и в случае, когда дискретизируемый сигнал смешан с широкополосной помехой, чтобы после дискретизации не ухудшалось отношение сигнал/помеха вследствие эффекта наложения.

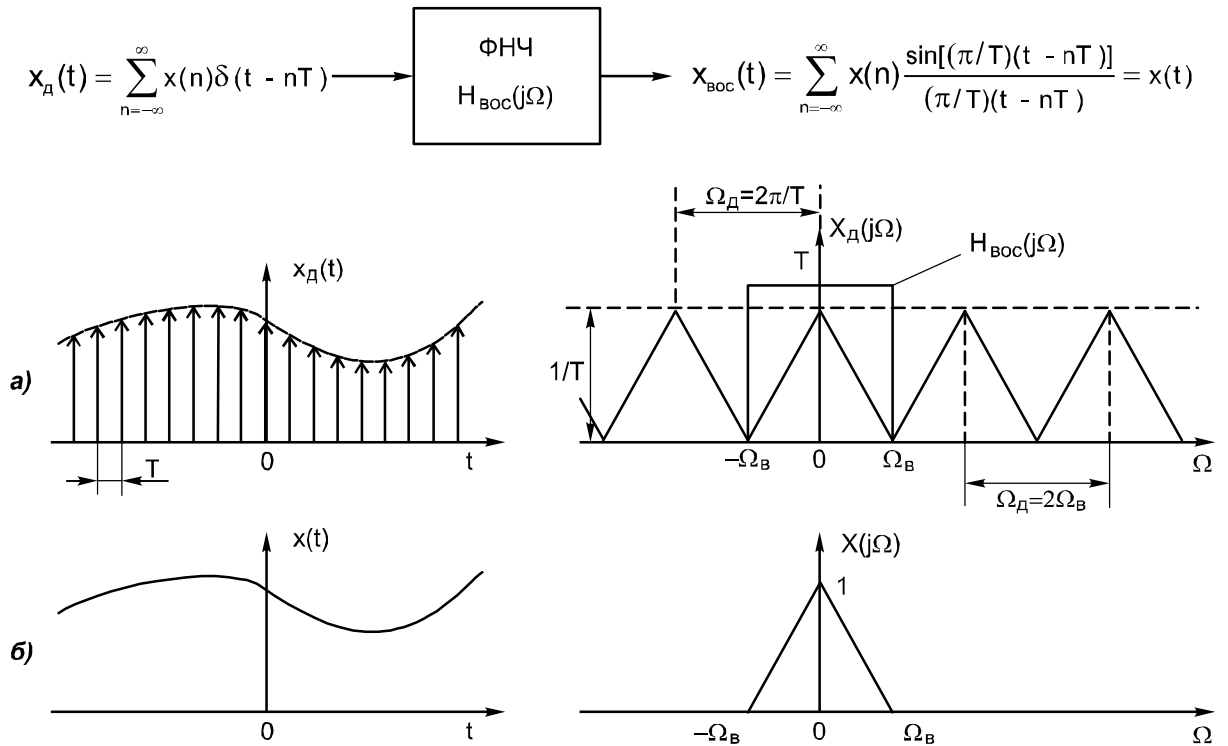


Рис.4.18. Восстановление аналогового сигнала пропусканием импульсного сигнала через идеальный ФНЧ; а) импульсный сигнал, его спектр и частотная характеристика ФНЧ, б) восстановленный сигнал и его спектр

Рассмотрим особо дискретизацию во времени аналоговых радиосигналов, которые могут быть представлены в виде  $x(t) = a(t) \cos[\Omega_0 t + j(t)]$ , и спектр которых локализован в полосе частот  $\Delta W$  в окрестности средней частоты  $W_0$ . Таким образом представляются, например, сигналы, получаемые при модуляции гармонического колебания с частотой  $W_0$  по амплитуде и/или углу (частоте, фазе) некоторым низкочастотным сигналом. Таким же образом могут быть представлены и любые другие узкополосные сигналы, для которых  $\Delta\Omega/\Omega_0 \ll 1$ . Понятно, что такие сигналы могут быть дискретизированы как видеосигналы с верхней частотой спектра, равной  $\Omega_0 + \Delta\Omega/2$ , однако такая дискретизация оказывается для них чрезвычайно избыточной. Покажем, что узкополосные радиосигналы можно дискретизировать, образуя отсчеты с периодом  $T \leq 2p / \Delta\Omega$ , где  $\Delta W$  - ширина спектра радиосигнала. Для этого запишем  $x(t)$  в виде

$$x(t) = a(t) \cos[\Omega_0 t + j(t)] = a(t) \cos j(t) \cos \Omega_0 t - a(t) \sin j(t) \sin \Omega_0 t = \\ = a_c(t) \cos \Omega_0 t - a_s(t) \sin \Omega_0 t = \text{Re}\{z(t)e^{j\Omega_0 t}\},$$

где  $a_c(t) = a(t) \cos j(t)$ ,  $a_s(t) = a(t) \sin j(t)$ ,  $z(t) = a_c(t) + ja_s(t) = a(t)e^{j\tilde{j}(t)}$  - комплексная огибающая радиосигнала. При известной частоте  $W_0$  узкополосный радиосигнал полностью описывается его комплексной огибающей  $z(t)$ , которая является низкочастотным процессом с шириной спектра  $\Delta W$ . Найдем связь между спектром  $X(j\Omega)$  сигнала  $x(t)$  и спектром  $Z(j\Omega)$  огибающей  $z(t)$ . Поскольку  $x(t) = (1/2)[z(t)e^{j\Omega_0 t} + z^*(t)e^{-j\Omega_0 t}]$ , следовательно,

$$X(j\Omega) = (1/2)\{Z[j(\Omega - \Omega_0)] + Z^*[j(-\Omega - \Omega_0)]\}.$$

На рис.4.19 графически отображены спектр  $|X(j\Omega)|$  сигнала  $x(t)$  и спектр  $|Z(j\Omega)|$

огибающей  $z(t)$ . Итак, при известной частоте  $W_0$  дискретизация узкополосного сигнала эквивалентна процессу образования выборок его комплексной огибающей с периодом  $T \leq 2p / \Delta\Omega$ , по которым этот сигнал может быть восстановлен без искажений. Заметим, что выборки такой огибающей, т.е. комплексная последовательность  $z(n) = z(t)|_{t=nT} = z(nT) = a_c(nT) + ja_s(nT)$  есть совокупность действительных последовательностей  $a_c(n) = a_c(t)|_{t=nT} = a_c(nT)$  и  $a_s(n) = a_s(t)|_{t=nT} = a_s(nT)$ .

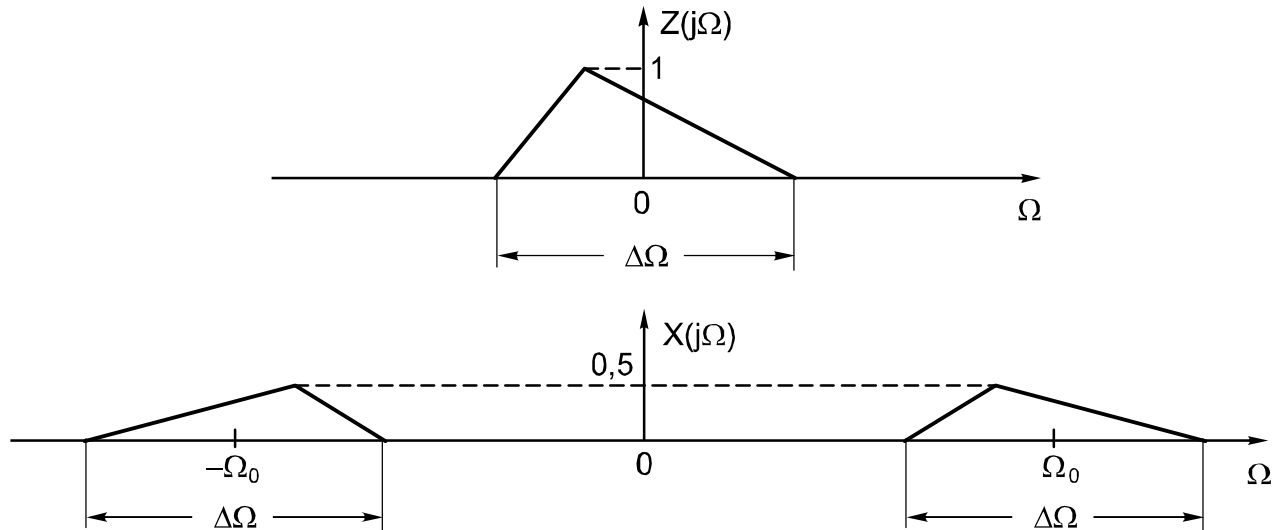


Рис.4.19. Спектры узкополосного сигнала  $X(j\Omega)$  и его комплексной огибающей  $Z(j\Omega)$

Поэтому при дискретизации радиосигнала  $x(t)$  можно предварительно выделить из него низкочастотные сигналы  $a_c(t)$  и  $a_s(t)$ , например, с помощью двухканальной схемы (рис.4.20), называемой блоком квадратурного разложения, с последующей их периодической дискретизацией. Каждый из каналов схемы состоит из перемножителя входного сигнала  $x(t)$  с опорным – гармоническим колебанием с частотой  $W_0$  и из фильтра нижних частот с полосой пропускания  $0 - \Delta\Omega/2$ , причем опорные колебания каналов сдвинуты по фазе на  $\pi/2$ . Возможны также и другие варианты получения выборок сигналов  $a_c(t)$  и  $a_s(t)$ , например, непосредственной дискретизацией  $x(t)$ .

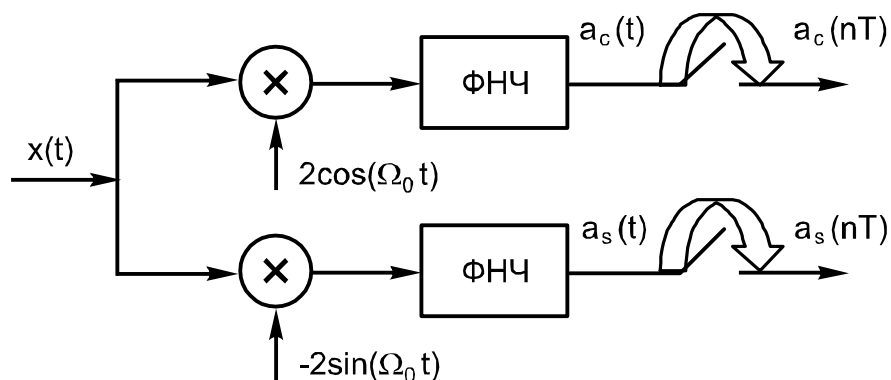


Рис.4.20. Блок квадратурного разложения узкополосного аналогового радиосигнала

#### 4.8. Частотно-временные деформации дискретного сигнала

Для сигнала непрерывного времени свойство частотно-временной деформации состоит в следующем. Если спектр (преобразование Фурье) сигнала  $x(t)$  равен  $X(j\Omega)$ , то для сигнала  $x(Mt)$  спектр изменяется к виду  $(1/M)X(j\Omega/M)$ . Другими словами, растяжение сигнала во времени ( $M < 1$ ) приводит к сжатию его спектра по оси частот и наоборот, сжатие сигнала во времени ( $M > 1$ ) растягивает его спектр по оси частот, что также сопровождается соответствующим масштабированием спектров. Аналогичные свойства имеют место и для дискретного сигнала  $x(n)$ , полученного в результате периодической (с периодом  $T$ ) дискретизации сигнала  $x(t)$ . При этом сжатие и растяжение (удлинение) дискретного сигнала эквивалентны соответственно уменьшению либо увеличению частоты дискретизации  $F_\delta = 1/T$ . Рассмотрим эти процедуры подробнее.

1. Уменьшение частоты дискретизации в целое  $M$  число раз.

Эта процедура называется также *прореживанием* или *децимацией* дискретного сигнала  $x(n)$ . При этом новый дискретный сигнал  $x_d(n)$ , получается прореживанием исходного, т.е. сохранением лишь каждого  $M$ -го отсчета сигнала  $x(n)$ :  $x_d(n) = x(Mn)$ . Такой сигнал может быть получен в результате периодической (с периодом  $T_1 = MT$ ) дискретизации сигнала  $x(t)$ , т.е. с частотой дискретизации  $F_{\delta 1} = F_\delta / M$ . На рис.4.21 представлено условное графическое отображение прореживателя в  $M$  раз.

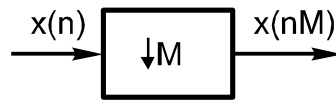


Рис.4.21. Прореживатель в  $M$  раз

Перепишем соотношение (4.36), связывающее спектры дискретного сигнала  $x(n)$  и сигнала непрерывного времени  $x(t)$ , в виде:

$$X(e^{j\omega}) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} X \left[ j \left( \frac{\omega}{T} - \frac{2\pi n}{T} \right) \right]. \quad (4.38)$$

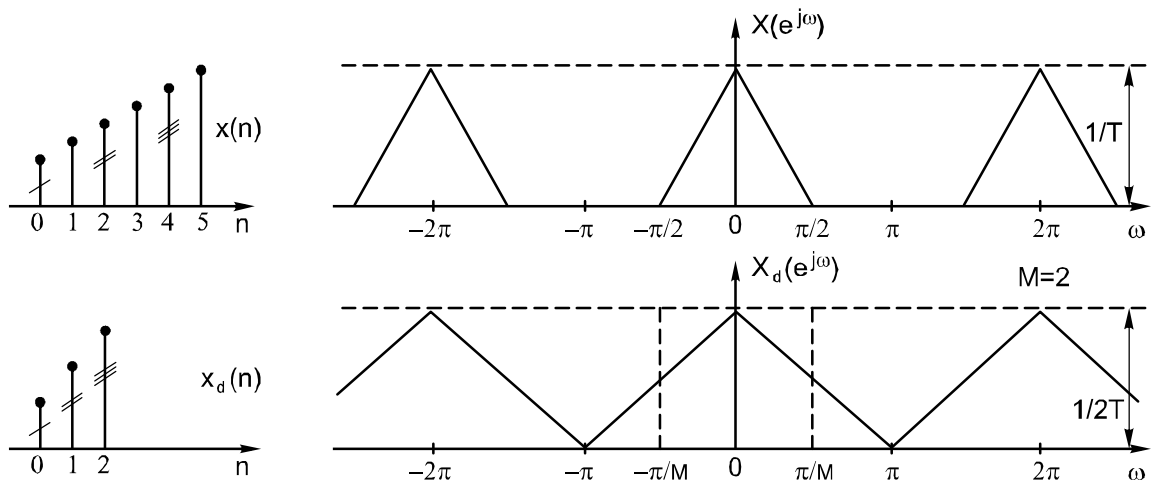


Рис.4.22. Дискретные сигналы и их спектры при прореживании ( $M=2$ )

На рис.4.22 на основе (4.34) графически представлены спектры дискретных сигналов  $x(n)$  и  $x_d(n)$  для  $M=2$ . Чтобы гарантировать отсутствие эффекта наложения в связи с

расширением спектра в  $M$  раз при прореживании дискретного сигнала, необходимо перед прореживанием пропустить его через дискретный фильтр нижних частот (ДФНЧ) с полосой пропускания  $|w| \leq p/M$ . Таким образом, совокупность каскадно включенных ДФНЧ с полосой пропускания  $|w| \leq p/M$  и прореживателя в  $M$  раз выполнит операцию уменьшения частоты дискретизации в  $M$  раз без эффекта наложения. Такую систему (рис.4.23) называют компрессором частоты дискретизации.

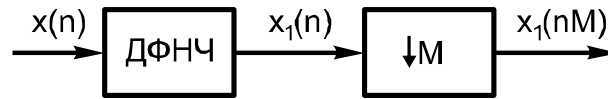


Рис.4.23. Компрессор частоты дискретизации в  $M$  раз

## 2. Увеличение частоты дискретизации в целое $L$ число раз.

Эту процедуру называют *интерполяцией* или восстановлением отсутствующих отсчетов дискретного сигнала. Для интерполяции дискретного сигнала  $x(n)$  его сначала удлиняют в  $L$  раз путем вставления между каждыми двумя соседними отсчетами  $L - 1$  нулевых отсчетов. Такой сигнал  $x_{y0}(n)$  можно записать в виде

$$x_{y0}(n) = \begin{cases} x(n/L), & n = kL, \\ 0, & n \neq kL. \end{cases}$$

Следовательно, спектр сигнала  $x_{y0}(n)$  примет форму:

$$\begin{aligned} X_{y0}(e^{jw}) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_{y0}(n) e^{-jwn} = \sum_{n=kL} x(n/L) e^{-jwn} = \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) e^{-jwLk} = X(e^{jwL}). \end{aligned} \quad (4.39)$$

Из (4.39) следует вывод о том, что при описанной выше операции удлинения дискретного сигнала, спектр сигнала  $x_{y0}(n)$  сжимается по оси частот в  $L$  раз в сравнении со спектром исходного сигнала, а период повторения будет равен  $2p/L$ . Если затем пропустить  $x_{y0}(n)$  через идеальный ДФНЧ с полосой пропускания  $|w| \leq p/L$  и усилением  $L$ , то лишние спектральные полосы будут удалены, а выходной сигнал фильтра будет точно соответствовать дискретному сигналу  $x_{ин}(n)$  с периодом дискретизации  $T/L$ , т.е. частота дискретизации его увеличится в  $L$  раз, а нужные отсчеты будут восстановлены. На рис.4.24 представлены графически: а) исходный сигнал и его спектр; б) сигнал, удлиненный добавлением нулевых отсчетов и его спектр; в) интерполированный сигнал на выходе ДФНЧ и его спектр. На рис.4.25 показана структура интерполятора (*экспандера* частоты дискретизации), увеличивающего частоту дискретизации в  $L$  раз.

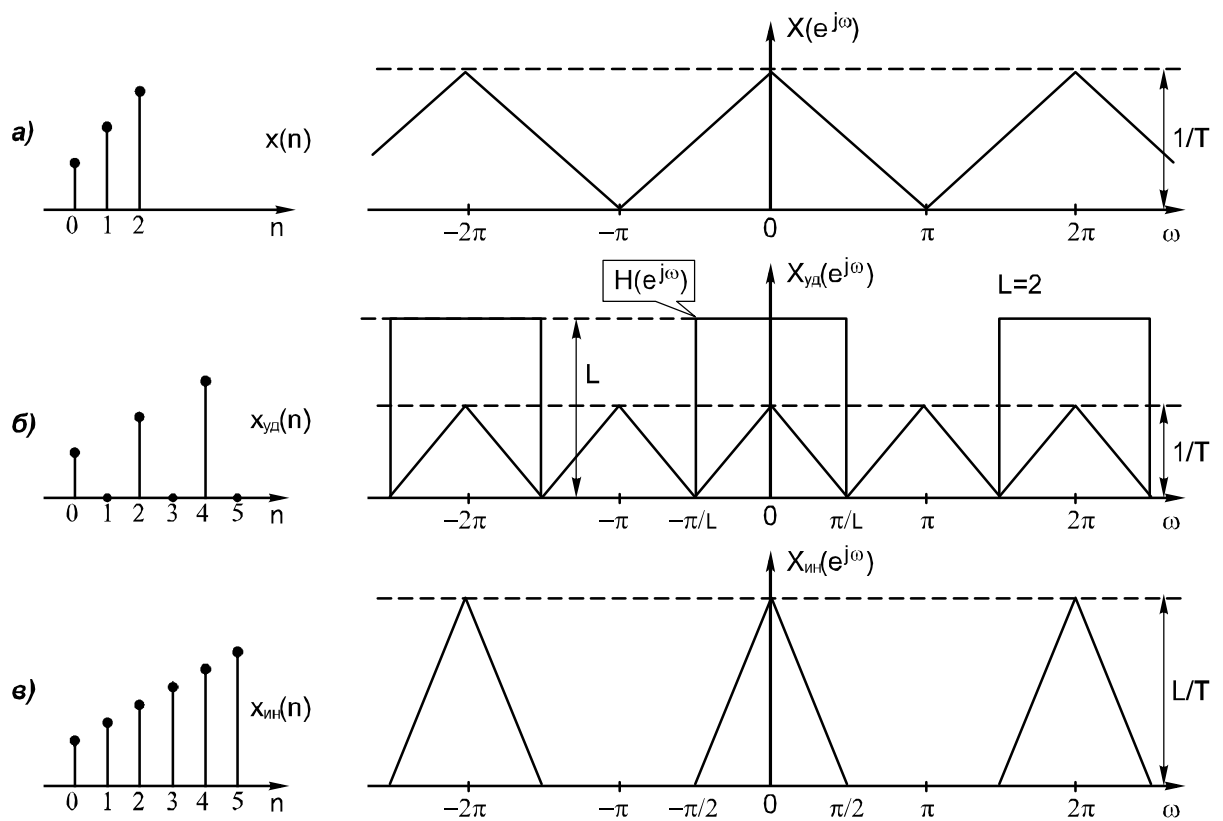


Рис.4.24. Дискретные сигналы и их спектры при удлинении и интерполяции ( $L=2$ )

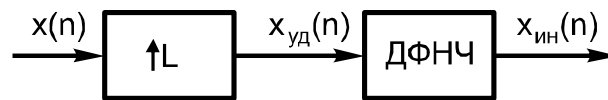


Рис.4.25. Экспандер частоты дискретизации в  $L$  раз

Если необходимо изменить частоту дискретизации исходного дискретного сигнала в  $L/M$  (рациональное число) раз, то такая операция может быть выполнена каскадным соединением интерполятора в  $L$  раз и дециматора в  $M$  раз, как это представлено на рис.4.26. Два последовательно включенных дискретных фильтра нижних частот ДФНЧ1 и ДФНЧ2 могут быть заменены одним с меньшей частотой среза.

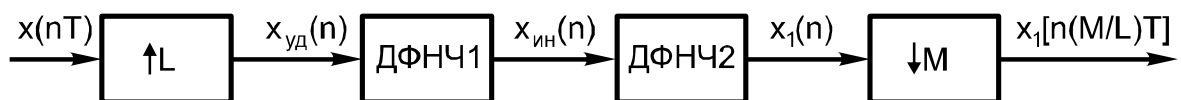


Рис.4.26. Каскадное включение интерполятора и дециматора при изменении частоты дискретизации в  $L/M$  раз

Рассмотрим примеры применения дециматоров и интерполяторов в цифровой аудиотехнике. При преобразовании в цифровую форму аналогового музыкального сигнала полагают, что полоса его соответствует интервалу частот  $0 \leq f \leq 22$  кГц и минимальная частота дискретизации равна 44 кГц. Перед дискретизацией необходима аналоговая низкочастотная фильтрация (ФНЧ) для исключения эффекта наложения и внеполосного шума. При этом ФНЧ должен иметь высокую равномерность частотной характеристики в

полосе пропускания и узкую переходную полосу от полосы пропускания к полосе задерживания. Такие фильтры, как правило, имеют сильно нелинейную фазо-частотную (ФЧХ) характеристику у края полосы пропускания (у частоты 22 кГц), что считается недопустимым для высококачественного воспроизведения музыки. Распространенный способ решения этой проблемы состоит в повышении вдвое (иногда вчетверо) частоты дискретизации. При этом аналоговый ФНЧ может иметь более широкую переходную полосу в интервале частот 22 – 44 кГц и нелинейность ФЧХ оказывается приемлемо малой. На рис.4.27 графически отображены: а) спектр аналогового сигнала; б) требуемая амплитудно-частотная характеристика ФНЧ при частоте дискретизации 44 кГц; в) требуемая амплитудно-частотная характеристика ФНЧ при частоте дискретизации 88 кГц.

Полученный на выходе аналого-цифрового преобразователя (АЦП) цифровой сигнал с частотой дискретизации 88 кГц далее обрабатывается цифровым ФНЧ (ЦФНЧ) с требуемой крутизной переходной полосы и прореживается вдвое для получения нужного сигнала с частотой дискретизации 44 кГц (см. рис.4.28). Заметим, что реализация ЦФНЧ с линейной ФЧХ, как это будет показано в дальнейшем при рассмотрении характеристик цифровых фильтров, не вызывает принципиальных затруднений. Для этой цели используются КИХ-фильтры с симметричной импульсной характеристикой.

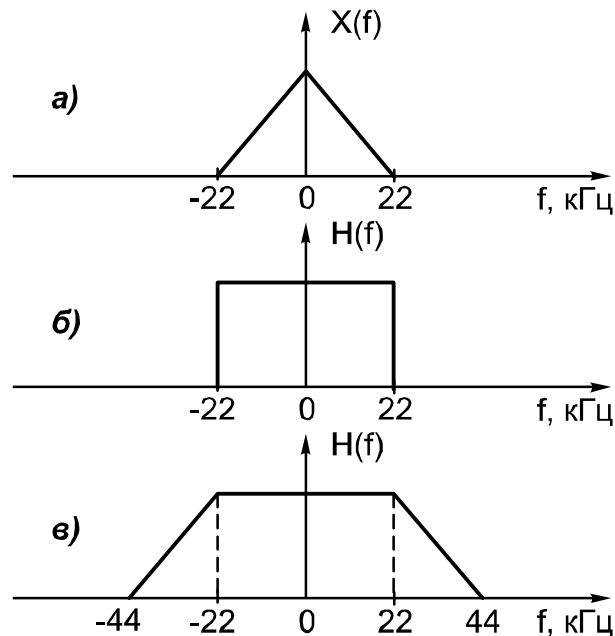


Рис.4.27. а) Спектр аналогового сигнала; б) амплитудно-частотная характеристика ФНЧ при частоте дискретизации 44 кГц; в) амплитудно-частотная характеристика ФНЧ при частоте дискретизации 88 кГц.

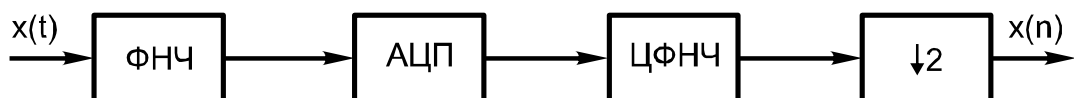


Рис.4.28. Преобразование аналогового музыкального сигнала в цифровой сигнал

Аналогичная проблема возникает в ступени цифро-аналогового преобразования, когда цифровой музыкальный сигнал должен быть преобразован в аналоговый путем обработки в ФНЧ. Для этой цели нужен аналоговый ФНЧ с частотой среза 22 кГц и узкой переходной полосой и, следовательно, он будет иметь сильно нелинейную ФЧХ, что недопустимо. Для решения этой проблемы используют интерполятор, повышающий частоту дискретизации цифрового сигнала вдвое, после чего такой сигнал преобразуется в

аналоговый в ЦАП с аналоговым ФНЧ, переходная полоса которого может быть в интервале частот 22 – 44 кГц, а нелинейность ФЧХ будет приемлемо малой. Блок-схема такой обработки представлена на рис.4.29.

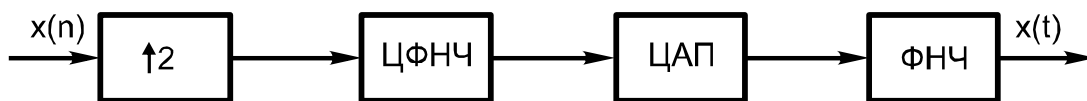


Рис.1.29. Преобразование цифрового музыкального сигнала в аналоговый сигнал