

## Лекции 2 -4 (дополнительный материал).

### Лекция 2. Помехоустойчивость систем цифровой радиосвязи с когерентной обработкой сигналов

#### ПЕРЕДАЧА И ПРИЕМ ДИСКРЕТНЫХ СООБЩЕНИЙ В КАНАЛАХ С ПОСТОЯННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

##### 5.1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ СИНТЕЗА ОПТИМАЛЬНОГО РАЗЛИЧИТЕЛЯ СИГНАЛОВ НА ОСНОВЕ ТЕОРИИ СТАТИСТИЧЕСКИХ РЕШЕНИИ

##### 5.1.1. ПРИЕМ СИГНАЛОВ КАК СТАТИСТИЧЕСКАЯ ЗАДАЧА ПРОВЕРКИ ГИПОТЕЗ

При различении сигналов ставится задача определить, какой из  $m$  возможных полезных сигналов  $s_r(t)$ ,  $r=1, 2, \dots, m$ , в данный момент поступает на вход приемного устройства. При этом для канала с аддитивной помехой  $n(t)$  принятый сигнал

$$u(t)=s_r(t)+n(t), 0 \leq t \leq T_a, \quad (5.1)$$

где  $T_a$  — интервал анализа.

Любые стратегии принятия решения сводятся в конечном счете к тому, что множество  $U$  всех возможных реализации входного процесса  $u(t)$  на интервале анализа  $T_a$  разбивается на  $m$  непересекающихся подмножеств  $U_r$ ,  $r=1, \dots, m$ , каждому из которых ставится во взаимнооднозначное соответствие то или иное решение. В зависимости от того, какому из указанных подмножеств принадлежит анализируемый отрезок реализации процесса  $u(t)$ , выносятся соответствующее решение о том, что принятым является некоторый сигнал  $s_r(t)$ , из множества возможных  $s_r(t)$ . Таким образом, задача принятия решения сводится к задаче проверки гипотез  $H_r$  о принадлежности анализируемой реализации  $u(t)$  тому или иному подмножеству  $U_r$ . В частном случае  $m=2$  имеется лишь два таких подмножества, так что принимается одно из двух возможных решений: “присутствует сигнал  $s_1(t)$ ” (решение в пользу гипотезы  $H_1$ ), либо “присутствует сигнал  $s_2(t)$ ” (решение в пользу гипотезы  $H_2$ ).

Рассмотрим многомерную условную плотность вероятности вектора  $\mathbf{u}$  с проекциями  $u_1, u_2, \dots, u_m$  при условии справедливости гипотезы  $H_r$ . Величины  $u_1, u_2, \dots, u_m$  однозначно связаны с анализируемым отрезком реализации процесса  $u(t)$  и могут представлять собой, например, выборочные значения реализации, коэффициенты разложения отрезка реализации в ряд Фурье на интервале анализа и т.п. Эта плотность вероятности  $w(\mathbf{u}|H_r)$  называется *функцией правдоподобия* и в простейшем случае полностью известной формы каждого из сигналов  $s_r(t)$  определяется  $M$ -мерной плотностью вероятности случайного процесса  $n(t)$ , так что в принципе может быть

предварительно определена. Поэтому будем полагать все функции  $w(\mathbf{u}|H_r)$ ,  $r = 1, \dots, m$ , известными.

После принятия решения (т. е. выбора той или иной гипотезы  $H_r$ ) не может быть полной уверенности, что это решение правильное. Действительно, например, в случае  $m = 2$  при справедливости гипотезы  $H_1$ , когда значения процесса  $u(t)$  подчиняются распределению  $w(\mathbf{u}|H_1)$ , существует отличная от нуля вероятность того, что принятая реализация  $u(t)$  на анализируемом отрезке времени окажется принадлежащей не к подмножеству  $U_1$ , а к подмножеству  $U_2$ . Тогда решение окажется принятым в пользу гипотезы  $H_2$ , и это решение будет ошибочным. Вероятность такого ошибочного решения при справедливости гипотезы  $H_1$

$$p_{\text{ош}}(H_2|H_1) = \int_{U_2} w(\mathbf{u}|H_1) d\mathbf{u}. \quad (5.2)$$

При справедливости гипотезы  $H_2$  вероятность ошибочного решения вычисляется аналогично:

$$p_{\text{ош}}(H_1|H_2) = \int_{U_1} w(\mathbf{u}|H_2) d\mathbf{u}. \quad (5.3)$$

Как видно из (5.2), (5.3), вероятности ошибочных решений существенно зависят от способа разделения множества  $U$  всех возможных реализации процесса  $u(t)$  на непересекающиеся подмножества  $U_r$ .

С другой стороны, вовсе не очевидно, что эти подмножества необходимо выбирать лишь с учетом значений вероятностей ошибок, стремясь, например, минимизировать  $p_{\text{ош}}(H_1|H_2)$ , либо  $p_{\text{ош}}(H_2|H_1)$ , либо среднее значение этих вероятностей. Прежде чем выбирать этот способ, необходимо выяснить, какие показатели рассматриваемой радиотехнической системы являются определяющими. Иначе говоря, необходимо выбрать критерий оптимальности.

### 5.1.2. ОПТИМАЛЬНЫЕ СТРАТЕГИИ ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИИ

В общем случае для того, чтобы учесть последствия различных решений (как правильных, так и ошибочных), вводят понятие *функции потерь*  $c(s, \gamma)$ . Ее конкретное значение  $c_{ik}$  соответствует определенным потерям при принятии решения  $\gamma$  в пользу гипотезы  $H_k$ , когда на самом деле истинной является гипотеза  $H_i$ . Тогда для  $m = 2$  и определенного выбора подмножеств  $U_r$  при справедливости гипотезы  $H_1$  потери составят

$$c_1 = c_{12}p_{\text{ош}}(H_2|H_1) + c_{11}[1 - p_{\text{ош}}(H_2|H_1)],$$

а при справедливости гипотезы  $H_2$

$$c_2 = c_{21}p_{\text{ош}}(H_1|H_2) + c_{22}[1 - p_{\text{ош}}(H_1|H_2)]$$

Величины  $c_1$  и  $c_2$  называются *условными рисками* при справедливости соответственно гипотез  $H_1$  и  $H_2$ .

Сами по себе первая и вторая гипотезы оказываются справедливыми с

некоторыми вероятностями  $p(H_1)$  и  $p(H_2)$ , называемыми *априорными*. Например, сигналы  $s_1(t)$  и  $s_2(t)$  передаются неодинаково часто и имеют, следовательно, различные вероятности появления на входе устройства обработки. В то же время очевидно, что  $p(H_1) + p(H_2) = 1$ , поскольку одна из двух гипотез обязательно оказывается справедливой. Тогда средние потери

$$c = c_1 p(H_1) + c_2 p(H_2) \quad (5.4)$$

Величина  $c$  называется *средним риском*. Его значение зависит от того, каким образом разделено множество  $U$  возможных реализаций анализируемого процесса  $u(t)$  на подмножества  $U_r$ . Естественно выбрать такое разделение множества  $U$  или, иначе говоря, выбрать такую стратегию принятия решений, чтобы средний риск  $c$  оказался минимальным. Эта стратегия называется *оптимальной байесовской стратегией*, а соответствующий критерий оптимальности — *критерием Байеса* или критерием минимума среднего риска. Можно показать, что эта стратегия записывается в виде:

$$\begin{aligned} \text{при } \Lambda(\mathbf{u}) \geq \Lambda_0 & \text{ справедлива гипотеза } H_1, \\ \text{при } \Lambda(\mathbf{u}) < \Lambda_0 & \text{ справедлива гипотеза } H_2, \end{aligned} \quad (5.5)$$

где  $w(\mathbf{u}|H_1)/w(\mathbf{u}|H_2) = \Lambda(\mathbf{u})$  — *отношение правдоподобия*, а

$$\Lambda_0 = (c_{22} - c_{24})p(H_2) / (c_{11} - c_{12})p(H_1) \quad (5.6)$$

— порог принятия решения.

В общем случае  $m > 2$ , когда имеют место более чем две возможные гипотезы, оптимальная байесовская стратегия сводится к системе неравенств, связывающих отношения правдоподобия

$$w(\mathbf{u}|H_L)/w(\mathbf{u}|H_r) = \Lambda_{Lr}(\mathbf{u}), \quad r \neq L, \quad r = 1, \dots, m$$

с соответствующими порогами принятия решения, зависящими от значений функции потерь  $c_{lr}$  и от априорных вероятностей различных гипотез.

Процесс выбора функции потерь в принципе весьма субъективен, поскольку обычно ее значения не имеют связи с действительными потерями или затратами при приеме сигналов, а призваны лишь подчеркнуть то обстоятельство, что некоторые виды ошибок при принятии решения более нежелательны, чем другие. Тем не менее в ряде случаев возможен достаточно определенный и обоснованный выбор значений  $c_{lr}$ . Примером такой ситуации является передача дискретных сообщений, когда для увеличения скорости передачи информации устранена избыточность алфавита источника. Характер последующего кодирования сообщения таков, что не имеет значения вид ошибки в приеме сообщения, а определяющим является лишь число таких ошибок в используемых кодовых комбинациях. Действительно, если используемый корректирующий код рассчитан на исправление некоторого числа  $l_u$  независимо возникающих ошибок в кодовой комбинации, то, как правило, любая ошибка одинаково нежелательна. При

этом естественно положить

$$\begin{aligned} c_{lr} &= c_{ou} = \text{const}, l, r = 1, \dots, m; l \neq r \\ c_{lr} &= 0, l, r = 1, \dots, m; l = r \end{aligned} \quad (5.7)$$

Тогда согласно (5.6) порог принятия решения

$$\Lambda_0 = p(H_2)/p(H_1) \quad (5.8)$$

Оптимальная байесовская стратегия (5.5) при условии (5.8) носит название стратегии, *оптимальной по Котельникову*. Часто ее называют также оптимальной по критерию идеального наблюдателя. При выполнении (5.7) при  $m=2$  средний риск (5.4)

$$c = c_{ou} p_{ou}(H_2|H_1)p(H_1) + c_{ou} p_{ou}(H_1|H_2)p(H_2) = c_{ou} p_{ou}$$

и совпадает с точностью до постоянного множителя  $c_{ou}$  с выражением для средней вероятности ошибок  $p_{ou}$ . Следовательно, при условии (5.7) оптимальная байесовская стратегия совпадает со стратегией, оптимальной по критерию минимума средней вероятности ошибок.

В системах передачи дискретной информации при использовании оптимальных методов кодирования, как правило, можно считать априорные вероятности всех гипотез одинаковыми. Тогда порог принятия решения (5.8)

$$\Lambda_0 = 1. \quad (5.9)$$

Оптимальная стратегия (5.5) при условии (5.9) называется стратегией, оптимальной по критерию *максимума отношения правдоподобия*.

Во всех рассмотренных случаях предполагалось, что условные плотности вероятностей  $w(\mathbf{u}|H_r)$ ,  $r = 1, \dots, m$ , точно известны. На практике распределение выборки  $\mathbf{u}$  часто оказывается зависящим от некоторых неизвестных случайных параметров  $\Theta_1, \dots, \Theta_L$ . Например, принимаемый полезный сигнал  $s_r(t)$  может содержать такие случайные параметры как начальная фаза, амплитуда, доплеровское смещение частоты и т. д. Таким образом, при проверке гипотез приходится иметь дело с условными многомерными плотностями вероятностей  $w(\mathbf{u}|H_r, \Theta)$  вектора  $\mathbf{u}$  при условии, что случайный вектор  $\Theta$  с проекциями  $\Theta_1, \Theta_2, \dots, \Theta_L$  принял определенное значение и справедлива гипотеза  $H_r$ . В случае, когда многомерное распределение  $w(\Theta)$  случайного вектора известно, может быть построена стратегия, оптимальная по Байесу. Действительно, введем в рассмотрение условные риски  $c_1(\Theta)$  и  $c_2(\Theta)$  вида

$$c_1(\Theta) = c_{12} p_{ou}(H_2|H_1, \Theta) + c_{11} [1 - p_{ou}(H_2|H_1, \Theta)],$$

$$c_2(\Theta) = c_{21} p_{ou}(H_1|H_2, \Theta) + c_{22} [1 - p_{ou}(H_1|H_2, \Theta)]$$

где аналогично (5.2), (5.3)

$$p_{ou}(H_2|H_1, \Theta) = \int_{U_2} w(\mathbf{u}|H_1, \Theta) d\mathbf{u}$$

$$p_{ouu}(H_1 | H_2, \Theta) = \int_{U_1} w(\mathbf{u} | H_2, \Theta) d\mathbf{u}$$

Средний риск  $c$ , очевидно, можно получить как математическое ожидание условного риска

$$\bar{c} = \int_{\Theta} c(\Theta) w(\Theta) d\Theta, \quad (5.10)$$

где аналогично (5.4)

$$c(\Theta) = c_1(\Theta) p(H_1) + c_2(\Theta) p(H_2).$$

Интегрирование в (5.10) производится по всей области  $\Theta$  возможных значений переменных  $\Theta_1, \Theta_2, \dots, \Theta_L$ . Оптимальная байесовская стратегия, обеспечивающая минимальное значение  $\bar{c}_{\min}$  среднего риска  $\bar{c}$ , записывается аналогично (5.5):

$$\begin{aligned} \text{при } \bar{\Lambda}(\mathbf{u}) \geq \Lambda_0 \text{ справедлива гипотеза } H_1, \\ \text{при } \bar{\Lambda}(\mathbf{u}) < \Lambda_0 \text{ справедлива гипотеза } H_2, \end{aligned} \quad (5.11)$$

где  $\int w(\mathbf{u} | H_1, \Theta) w(\Theta) d\Theta / \int w(\mathbf{u} | H_2, \Theta) w(\Theta) d\Theta = \bar{\Lambda}(\mathbf{u})$  — отношение правдоподобия, а порог  $\Lambda_0$  определяется выражением (5.6).

Если распределение  $w(\Theta)$  неизвестно, то применяют различные специальные методы построения стратегии решения. Так, используют *минимаксный* подход, когда в качестве  $w(\Theta)$  выбирается “наихудшее” распределение, соответствующее максимуму величины  $\bar{c}_{\min}$ , заменяют неизвестные значения  $\Theta_1, \Theta_2, \dots, \Theta_L$  их статистическими оценками и т. п.

### 5.1.3. ФУНКЦИОНАЛ ОТНОШЕНИЯ ПРАВДОПОДОБИЯ

Как следует из результатов п. 5.1.2, использование любой из рассмотренных стратегий принятия решения предполагает вычисление отношения правдоподобия  $\Lambda(\mathbf{u})$ . При этом необходимо прежде всего задать статистику случайного процесса  $n(t)$ . Будем в дальнейшем полагать, что процесс  $n(t)$  — стационарный гауссовский случайный с нулевым математическим ожиданием.

Для вычисления отношения правдоподобия необходимо определить функции правдоподобия  $w(\mathbf{u} | H_r)$ , причем с учетом (5.1) многомерная плотность вероятности процесса  $u(t)$  определяется многомерной плотностью вероятности  $w(\mathbf{n})$  процесса  $n(t)$  с последующей заменой  $\mathbf{n}$  в соответствии с выражением

$$n(t) = u(t) - s_r(t) \quad (5.12)$$

Дальнейший анализ и его результаты существенно определяются видом многомерной выборки  $\mathbf{n} = (n_1, \dots, n_M)$  процесса  $n(t)$ .

Выберем в качестве координат  $n_k, k=1, \dots, M$ , многомерной выборки  $\mathbf{n}$  коэффициенты разложения Карунена — Лозва случайного процесса  $n(t)$ ;

$$n(t) = \sum_{k=1}^M n_k \varphi_k(t), \quad (5.13)$$

где

$$n_k = \int_0^T n(t) \varphi_k(t) dt \quad (5.14)$$

а ортонормированные функции  $\varphi_k(t)$  удовлетворяют интегральному уравнению

$$\int_0^T R(t_2 - t_1) \varphi_k(t_2) dt_2 = \sigma_k^2 \varphi_k(t_1). \quad R(\tau) = \left( N_0/2 \right) \delta(\tau) \quad (5.15)$$

Тогда, учитывая свойства разложения Карунена—Лозва и распределение процесса  $n(t)$ , можно утверждать, что координаты  $n_k$  являются независимыми гауссовскими случайными величинами с нулевыми математическими ожиданиями и дисперсиями  $\sigma_k^2$ . Соответственно их совместная  $M$ -мерная плотность вероятностей определяется как

$$w(\mathbf{n}) = (\sqrt{2\pi})^{-M} \prod_{k=1}^M \sigma_k^{-1} \exp\left(-\frac{1}{2} \sum_{k=1}^M \frac{n_k^2}{\sigma_k^2}\right) \quad (5.16)$$

При этом существенно то обстоятельство, что при увеличении размера выборки  $M$ , во-первых, распределение (5.16) остается справедливым (некоррелированность коэффициентов сохраняется) и, во-вторых, точность представления процесса  $n(t)$  значениями  $n_k$  повышается.

В частном случае белого шума  $n(t)$ , когда

$$R(\tau) = \left( N_0/2 \right) \delta(\tau) \quad (5.17)$$

где  $N_0/2$  — двусторонняя спектральная плотность мощности процесса  $n(t)$ , подставляя (5.17) в (5.15), легко видеть, что интегральному уравнению (5.15) удовлетворяют любые функции  $\varphi_k(t)$ , ортогональные на интервале  $[0, T_a]$ .

При этом все коэффициенты  $\sigma_k^2$  одинаковы и равны  $N_0/2$ .

С учетом (5.12) заменим  $n_k = u_k - s_{rk}$ , причем в соответствии с (5.13) и (5.14) функции  $u(t)$  и  $s_r(t)$  и коэффициенты  $u_k$  и  $s_{rk}$  связаны выражениями

$$\begin{aligned} u(t) &= \sum_{k=1}^M u_k \varphi_k(t), \quad u_k = \int_0^T u(t) \varphi_k(t) dt \\ s_r(t) &= \sum_{k=1}^M s_{rk} \varphi_k(t), \quad s_{rk} = \int_0^T s_r(t) \varphi_k(t) dt \end{aligned} \quad (5.18)$$

Тогда отношение правдоподобия  $\Lambda(\mathbf{u})$  можно представить в виде

$$\Lambda^{(M)} = w(\mathbf{u}|H_1)/w(\mathbf{u}|H_2) = \frac{\exp\left[-\frac{1}{2} \sum_{k=1}^M \frac{(u_k - s_{1k})^2}{\sigma_k^2}\right]}{\exp\left[-\frac{1}{2} \sum_{k=1}^M \frac{(u_k - s_{2k})^2}{\sigma_k^2}\right]} \quad (5.19)$$

Получаемая при  $M \rightarrow \infty$  предельная форма отношения правдоподобия  $\Lambda(\mathbf{u}) = \lim_{M \rightarrow \infty} \Lambda^{(M)}(\mathbf{u})$  называется *функционалом отношения*.

Поскольку все рассмотренные оптимальные стратегии принятия решений предусматривают сравнение  $\Lambda(\mathbf{u})$  с пороговым значением  $\Lambda_0$ , можно перейти к более удобной форме записи: сравнивать  $f[\Lambda(\mathbf{u})]$  с порогом  $f(\Lambda_0)$ , где  $f(\bullet)$  — монотонная функция, определенная для всех интересующих нас значений аргумента. При этом, поскольку  $\Lambda(\mathbf{u}) > 0$  и  $\Lambda_0 > 0$ , целесообразно в качестве  $f(\bullet)$  выбрать логарифмическую функцию. Тогда, переходя в (5.19) к пределу при  $M \rightarrow \infty$  и логарифмируя полученное выражение, получаем

$$\ln \Lambda(\mathbf{u}) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{u_k}{\sigma_k^2} (s_{1k} - s_{2k}) - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} (s_{1k}^2 - s_{2k}^2) / \sigma_k^2 \quad (5.20)$$

## 5.2. СИСТЕМЫ ПЕРЕДАЧИ С КОГЕРЕНТНОЙ ОБРАБОТКОЙ СИГНАЛОВ

### 5.2.1. АЛГОРИТМ ОПТИМАЛЬНОГО ДЕМОДУЛЯТОРА

Рассмотрим ситуацию, когда решение принимают на основании анализа отрезка  $[0, T_a]$  реализации процесса  $u(t)$ , определяемого выражением (5.1), при полностью известных возможных сигналах  $s_r(t)$ , имеющих длительность  $T_a$ . При этом предполагают, что момент  $t_0$  поступления полезного сигнала на вход приемника точно известен, а также точно известна начальная фаза  $\varphi_r$  высокочастотного заполнения полезного сигнала. Обработка сигналов в таких условиях, когда полностью используется информация о значении  $\varphi_r$ , называется *когерентной*. Положим далее  $t_0=0$ ;  $\varphi_r=0$ . Кроме того, если не будет специальных оговорок, будем полагать, что процесс  $n(t)$  представляет собой белый шум, а объем алфавита  $m=2$ . При этом выражение (5.20) приобретает вид

$$\ln \Lambda(\mathbf{u}) = \frac{2}{N_0} \sum_{k=1}^{\infty} u_k (s_{1k} - s_{2k}) - \frac{1}{N_0} \sum_{k=1}^{\infty} (s_{1k}^2 - s_{2k}^2) \quad (5.21)$$

С другой стороны, заметим, что с учетом (5.18) и ортонормированности функции  $\varphi_k(t)$

$$\int_0^T u(t) s_r(t) dt = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} u_k s_{rl} \int_0^T \varphi_k(t) \varphi_l(t) dt = \sum_{k=1}^{\infty} u_k s_{rk}$$

так что

$$\sum_1^{\infty} u_k (s_{1k} - s_{2k}) = \int_0^T u(t) [s_1(t) - s_2(t)] dt \quad (5.22)$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} (s_{1k}^2 - s_{2k}^2) = \int_0^T s_1^2 dt - \int_0^T s_2^2 dt.$$

Учитывая (5.22), имеем из (5.21):

$$\ln \Lambda(\mathbf{u}) = \frac{2}{N_0} \int_0^T u(t) [s_1(t) - s_2(t)] dt - \frac{1}{N_0} \left[ \int_0^T s_1^2(t) dt - \int_0^T s_2^2(t) dt \right] \quad (5.23)$$

где  $\int_0^T s_r^2(t)dt = E_r$  — энергия сигнала  $s_r(t)$ .

При одинаковых априорных вероятностях полезных сигналов, используя критерий минимума средней вероятности ошибки, алгоритм работы оптимального различителя с учетом (5.5), (5.9) и (5.23) для  $m=2$  записываем в виде: регистрируется сигнал  $s_1(t)$ , если

$$q = \int_0^T u(t)[s_1(t) - s_2(t)]dt \geq (E_1 - E_2)/2 \quad (5.24)$$

где  $(E_1 - E_2)/2 = l_0$ .

На практике часто  $E_1 = E_2$ . Тогда

$$q = \int_0^T u(t)[s_1(t) - s_2(t)]dt \geq 0 \quad (5.25)$$

В общем случае ( $m > 2$ ), полагая, что все сигналы равновероятны, алгоритм оптимального демодулятора можно представить в виде следующей системы ( $m-1$ ) неравенств: регистрируется сигнал  $s_l(t)$ , если

$$\int_0^T u(t)s_l(t)dt - \frac{E_l}{2} \geq \int_0^T u(t)s_r(t)dt - \frac{E_r}{2}, \quad l, r = 1, \dots, m; \quad r \neq l \quad (5.26)$$

Демодулятор, реализующий алгоритм (5.26), (рис. 5.1), содержит  $m$  идентичных каналов, включающих местный генератор, формирующий опорный сигнал  $s_r(t)$ ,  $r=1, \dots, m$ , множитель и интегратор. На выходе каждого канала установлено устройство, в котором из соответствующего результата интегрирования вычитается постоянное значение, определяемое энергией полезных сигналов.

Решение о том, какой из  $m$  возможных полезных сигналов присутствует на входе устройства различения, принимается в решающем устройстве РУ в момент, совпадающий с моментом окончания полезного сигнала, после чего происходит сброс напряжения на интеграторах до нулевого уровня.

Задача построения демодулятора облегчается, если выполняется условие  $E_r = E$ ,  $r=1, 2, \dots, m$ . Такая система сигналов называется системой с *активной паузой*. При этом отпадает необходимость использовать устройства вычитания в схеме на рис. 5.1, так как в этом случае алгоритм (5.26) приобретает вид

$$\int_0^T u(t)s_l(t)dt \geq \int_0^T u(t)s_r(t)dt, \quad l, r = 1, \dots, m; \quad r \neq l \quad (5.27)$$

Демодулятор на рис. 5.11 называют *корреляционным*, поскольку напряжение на выходе интегратора любого  $i$ -го канала в момент окончания анализа пропорционально значению функции взаимной корреляции сигнала  $u(t)$  и опорного напряжения  $s_i(t)$ .

Другой метод реализации алгоритма (5.26) основан на использовании согласованных фильтров. Пусть имеется фильтр, согласованный с сигналом  $s_i(t)$ . Как известно, импульсная характеристика (реакция на воздействие в



виде  $\delta$ -функции) такого фильтра

$$h_i(t) = as_i(T_s - t) \quad (5.28)$$

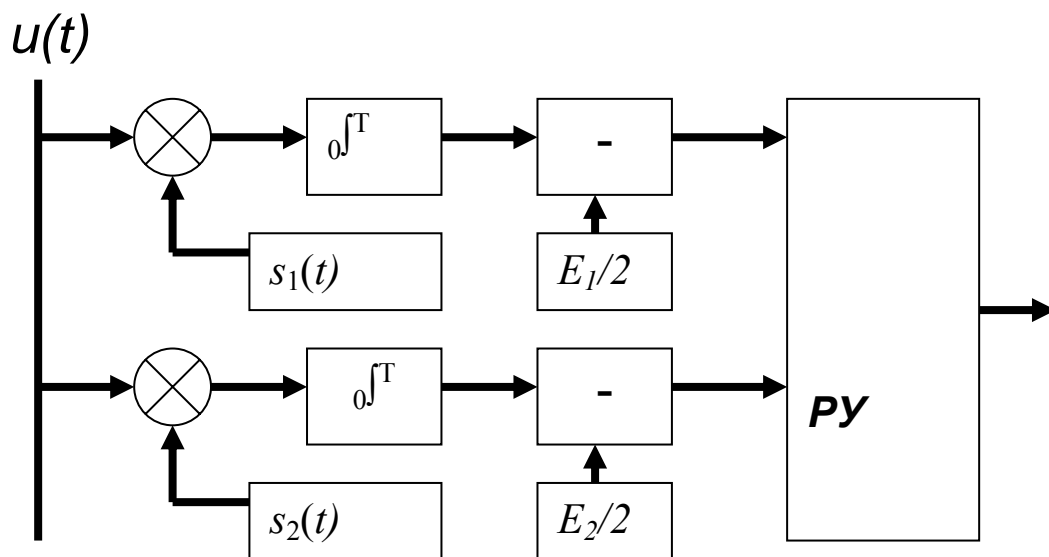


Рис. 5.1. Структурная схема демодулятора.  $m$  детерминированных сигналов с использованием корреляторов

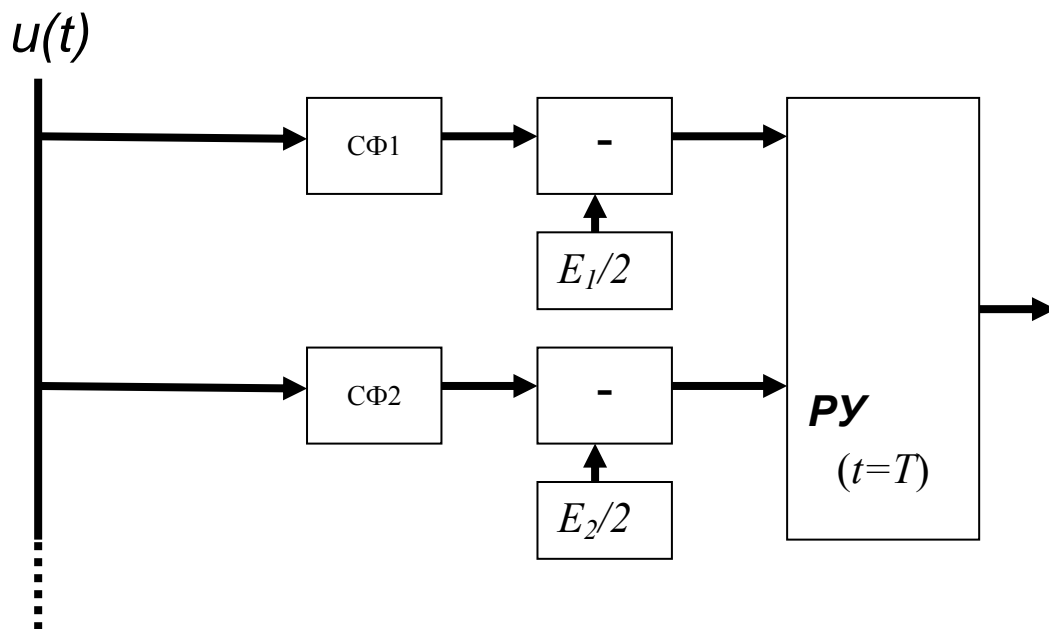


Рис. 5.2. Структурная схема демодулятора.  $m$  детерминированных сигналов с использованием согласованных фильтров

Выходное напряжение фильтра при поступлении на его вход процесса  $u(t)$  определяется с помощью интеграла Дюамеля

$$q_i(t) = \int_0^T u(t - \tau) h_i(\tau) d\tau.$$

С учетом (5.28)

$$q_i(t) = a \int_0^t u(t - \tau) s_i(T - \tau) d\tau \quad (5.29)$$

Заменяя переменную в (5.29), получим

$$q_i(t) = a \int_{T-t}^T u(y + t - T) s_i(y) dy \quad (5.30)$$

Таким образом, в момент окончания полезного сигнала

$$q_i(T) = a \int_0^T u(t) s_i(t) dt$$

т. е. получаем именно ту величину, которая должна быть вычислена в соответствии с алгоритмом (5.26). Следовательно, алгоритм оптимального приема может быть реализован с помощью устройства на основе фильтров СФ<sub>i</sub>, согласованных с сигналами  $s_i(t)$  (рис. 5.2).

## 5.2.2. ПОТЕНЦИАЛЬНАЯ ПОМЕХОУСТОЙЧИВОСТЬ

**Двоичные системы передачи информации.** Пусть сигнал на входе приемника имеет вид  $u(t) = \lambda s_1(t) + (1 - \lambda) s_2(t) + n(t)$ , где  $\lambda$  — случайная величина, принимающая значения 1 и 0 с вероятностями  $p_1$  и  $p_2$  соответственно, причем  $p_1 + p_2 = 1$ ;  $s_1(t)$  и  $s_2(t)$  — полезные сигналы с известными параметрами;  $n(t)$  — стационарный гауссовский белый шум с нулевым математическим ожиданием и корреляционной функцией  $R_n(\tau) = (N_0/2)\delta(\tau)$ . Алгоритм работы демодулятора описывается выражением (5.24).

Средняя (полная) вероятность ошибки, используемая для количественной оценки помехоустойчивости, для рассматриваемого случая

$$p_{oui} = p_1 p_{oui}(s_2|s_1) + p_2 p_{oui}(s_1|s_2), \quad (5.31)$$

где условные вероятности ошибок

$$\begin{aligned} p_{oui}(s_2|s_1) &= \int_{q < 10} w(q|s_1) dq, \\ p_{oui}(s_1|s_2) &= \int_{q \geq 10} w(q|s_2) dq \end{aligned} \quad (5.32)$$

$w(q|s_1)$  и  $w(q|s_2)$  — плотности вероятности случайной величины  $q$  при наличии на входе сигналов  $s_1(t)$  и  $s_2(t)$  соответственно.

Найдем распределение величины  $q$  для указанных случаев. Пусть на входе приемника присутствует сигнал  $s_1(t)$ . Тогда с учетом (5.24)

$$q = \int_0^T [s_1(t) + n(t)][s_1(t) - s_2(t)] dt$$

Легко видеть, что величина  $q$  является линейным функционалом гауссовского случайного процесса, а следовательно, имеет нормальную

плотность вероятности.

Математическое ожидание величины  $q$

$$m_q = M(q) = \int_0^T [s_1(t) + M\{n(t)\}][s_1(t) - s_2(t)] dt = E(1-r_s),$$

где

$$r_s = (1/E) \int_0^T [s_1(t)s_2(t)] dt$$

условно называют коэффициентом взаимной корреляции между сигналами  $s_1(t)$  и  $s_2(t)$ . Дисперсия величины  $q$

$$D_q = M\{(q - m_q)\} = M\left\{\left[\int_0^T n(t)[s_1(t) - s_2(t)] dt\right]^2\right\} =$$

$$= \int_0^T \int_0^T M\{n(t_1)n(t_2)\} [s_1(t_1) - s_2(t_1)][s_1(t_2) - s_2(t_2)] dt_1 dt_2$$

Учитывая, что  $M\{n(t_1)n(t_2)\} = (N_0/2)\delta(t_2 - t_1)$ , и используя фильтрующее свойство  $\delta$ -функции, находим  $D_q = EN_0(1-r_s)$ . Таким образом,

$$w(q|s_1) = [2\pi EN_0(1-r_s)]^{-1/2} \exp\{-[q - E(1-r_s)]^2 / [2EN_0(1-r_s)]\}.$$

Аналогично можно показать, что если присутствует сигнал  $s_2(t)$ , то случайная величина

$$q = \int_0^T [s_2(t) + n(t)][s_1(t) - s_2(t)] dt$$

будет иметь нормальную плотность вероятности с параметрами

$$m_q = -E(1-r_s), \quad D_q = EN_0(1-r_s),$$

т.е.

$$w(q|s_2) = [2\pi EN_0(1-r_s)]^{-1/2} \exp\{-[q + E(1-r_s)]^2 / [2EN_0(1-r_s)]\}$$

Плотности вероятности  $w(q|s_1)$  и  $w(q|s_2)$  представлены на рис. 5.3.

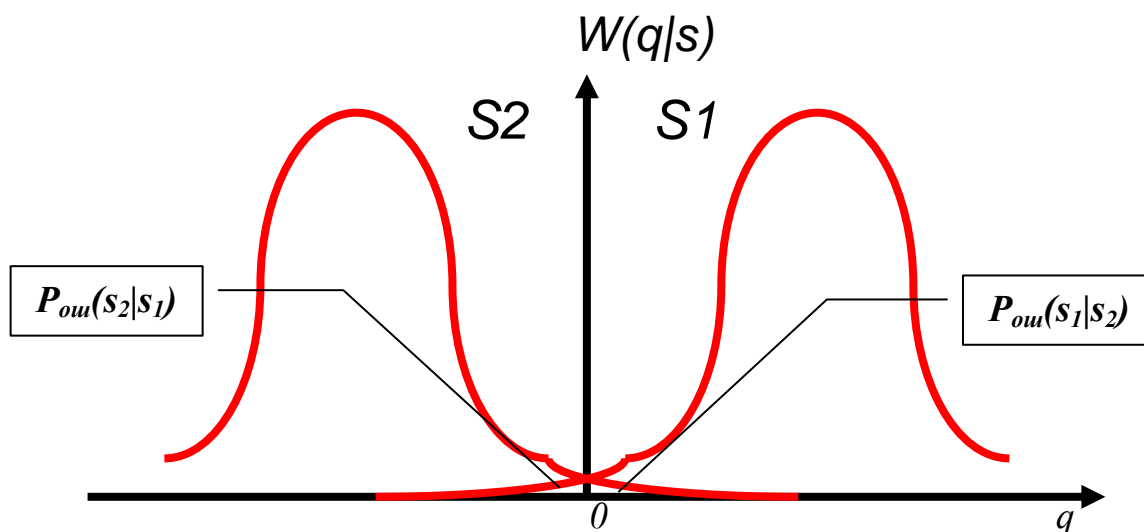


Рис. 5.3. Плотности вероятности сигналов на выходе оптимального демодулятора в системах с активной паузой

Теперь, используя (5.32), нетрудно определить условные вероятности ошибок:

$$p_{ош}(s_2|s_1) = \int_{-\infty}^{l_0} \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sqrt{EN_0(1-r_s)}} \exp\left\{-\frac{[q - E(1-r_s)]^2}{2EN_0(1-r_s)}\right\} dq,$$

$$p_{ош}(s_1|s_2) = \int_{l_0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sqrt{EN_0(1-r_s)}} \exp\left\{-\frac{[q + E(1-r_s)]^2}{2EN_0(1-r_s)}\right\} dq,$$

Для  $p_1=p_2=1/2$  и  $E_1 = E_2 = E$  порог  $l_0 = 0$ . При этом

$$p_{ош}(s_1|s_2) = p_{ош}(s_2|s_1) = p_{ош} = 1 - \Phi(\sqrt{E(1-r_s)/N_0}), \quad \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{(-t^2/2)} dt. \quad (5.33)$$

Используя (5.31) и (5.33), окончательно находим

$$p_{ош} = 1 - \Phi(\sqrt{E(1-r_s)/N_0}) = 1 - \Phi(\sqrt{(1-r_s)h}), \quad (5.34)$$

где  $h^2 = E/N_0$ .

Из (5.34) видно, что средняя вероятность ошибки зависит не только от энергии сигнала и спектральной плотности мощности шума, но и от коэффициента взаимной корреляции между сигналами, т. е. от используемой системы сигналов. Интеграл вероятности  $\Phi(x)$  является монотонно возрастающей функцией аргумента. Поэтому при одном и том же отношении  $E/N_0$  помехоустойчивость системы оказывается тем выше, чем меньше коэффициент взаимной корреляции  $r_s$ .

Так как  $-1 \leq r_s \leq 1$ , то наибольшей помехоустойчивостью обладают сигналы с  $r_s = -1$ . Они имеют одинаковую форму, но противоположные знаки и называются *противоположными*. Для них

$$p_{ош} = 1 - \Phi\left(\sqrt{\frac{2E}{N_0}}\right) = 1 - \Phi(\sqrt{2}h). \quad (5.35)$$

Примером противоположных сигналов являются фазоманипулированные сигналы с манипуляцией фазы на  $\pi$ :

$$s_1(t) = A_0 \cos \omega_0 t, \quad s_2(t) = A_0 \cos(\omega_0 t + \pi), \quad 0 \leq t \leq T.$$

Меньшей помехоустойчивостью обладают *ортогональные* сигналы ( $r_s = 0$ ). Для них

$$p_{ош} = 1 - \Phi\left(\sqrt{\frac{E}{N_0}}\right) = 1 - \Phi(h). \quad (5.36)$$

Сигналы с  $r_s = 1$  являются одинаковыми, т. е.  $s_1(t) = s_2(t)$ , и их невозможно различить. Для них  $p_{ош} = 1/2$ .

Примером ортогональных сигналов являются фазоманипулированные сигналы с манипуляцией фазы на  $\pi/2$ :

$$s_1(t) = A_0 \cos \omega_0 t, \quad s_2(t) = A_0 \cos(\omega_0 t + \pi/2), \quad 0 \leq t \leq T.$$

Ортогональные сигналы можно получить на основе частотной

манипуляции. Действительно, в этом случае

$$s_1(t) = A_0 \cos(\omega_1 t - \varphi_1), \quad s_2(t) = A_0 \cos(\omega_2 t - \varphi_2), \quad 0 \leq t \leq T.$$

При  $\varphi_1 = \varphi_2$  коэффициент взаимной корреляции между этими сигналами

$$r_s = \sin [ (\omega_2 - \omega_1) T ] / (\omega_2 - \omega_1) T.$$

При выполнении условия  $(\omega_2 - \omega_1) T = k\pi, k=1, 2, \dots, r_s=0$  и сигналы оказываются ортогональными.

На практике обычно ортогональность обеспечивается выбором параметров  $\omega_1, \omega_2$  и  $T$  так, чтобы  $(\omega_2 - \omega_1) T \gg 1$ . При этом  $r_s \approx 0$ .

Заметим, что минимальное значение коэффициента взаимной корреляции между частотно-манипулированными сигналами равно  $-1/1,5\pi$ . Оно достигается, когда  $(\omega_2 - \omega_1) T = 1,5\pi$ . При этом вероятность ошибок

$$p_{ou} = 1 - \Phi \left( \sqrt{1.21E/N_0} \right) = 1 - \Phi(\sqrt{1.21h}).$$

Оценим помехоустойчивость системы передачи, использующей амплитудно-манипулированные сигналы

$$s_1(t) = A_0 \cos(\omega_0 t + \varphi), \quad s_2(t) = 0, \quad 0 \leq t \leq T.$$

Алгоритм различения сигналов (5.24) в рассматриваемом случае принимает вид

$$q = \int_0^T u(t) s_1(t) dt \geq E/2 = l_0. \quad (5.37)$$

Плотности вероятности  $w(q|s_1)$  и  $w(q|s_2)$  описываются гауссовским законом с параметрами

$$m_q = E, \quad D_q = EN_0/2 \quad \text{и} \quad m_q = 0, \quad D_q = EN_0/2.$$

соответственно (рис. 5.4).

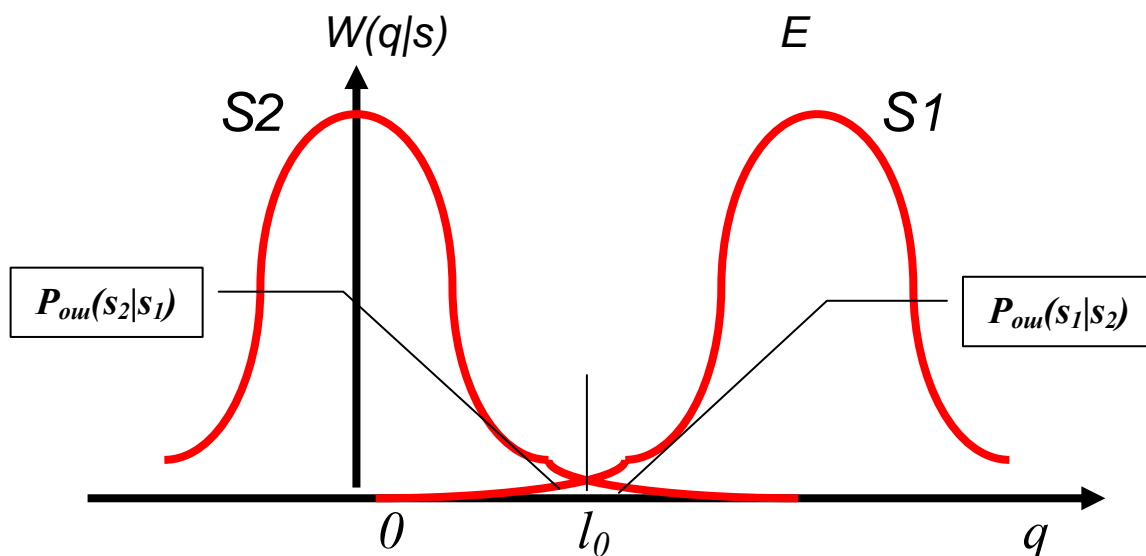


Рис. 5.4. Плотности вероятности сигналов на выходе оптимального демодулятора в системах с пассивной паузой

При  $p_1=p_2=1/2$  средняя вероятность ошибки

$$p_{ош} = \frac{1}{2} \left[ \int_{-\infty}^{l_0} w(q | s_1) dq + \int_{l_0}^{\infty} w(q | s_2) dq \right].$$

Учитывая, что порог  $l_0 = E/2$  [см. (5.37)], находим

$$p_{ош} = 1 - \Phi\left(0.5\sqrt{2E/N_0}\right) = 1 - \Phi(h/\sqrt{2}). \quad (5.38)$$

На рис. 5.5 представлены зависимости вероятности ошибок от отношения  $E/N_0$  для фазо- (ФМ), частотно- (ЧМ) и амплитудно-манипулированных (АМ) сигналов, рассчитанные соответственно по формулам (5.35), (5.36), (5.38) (оплошные линии).

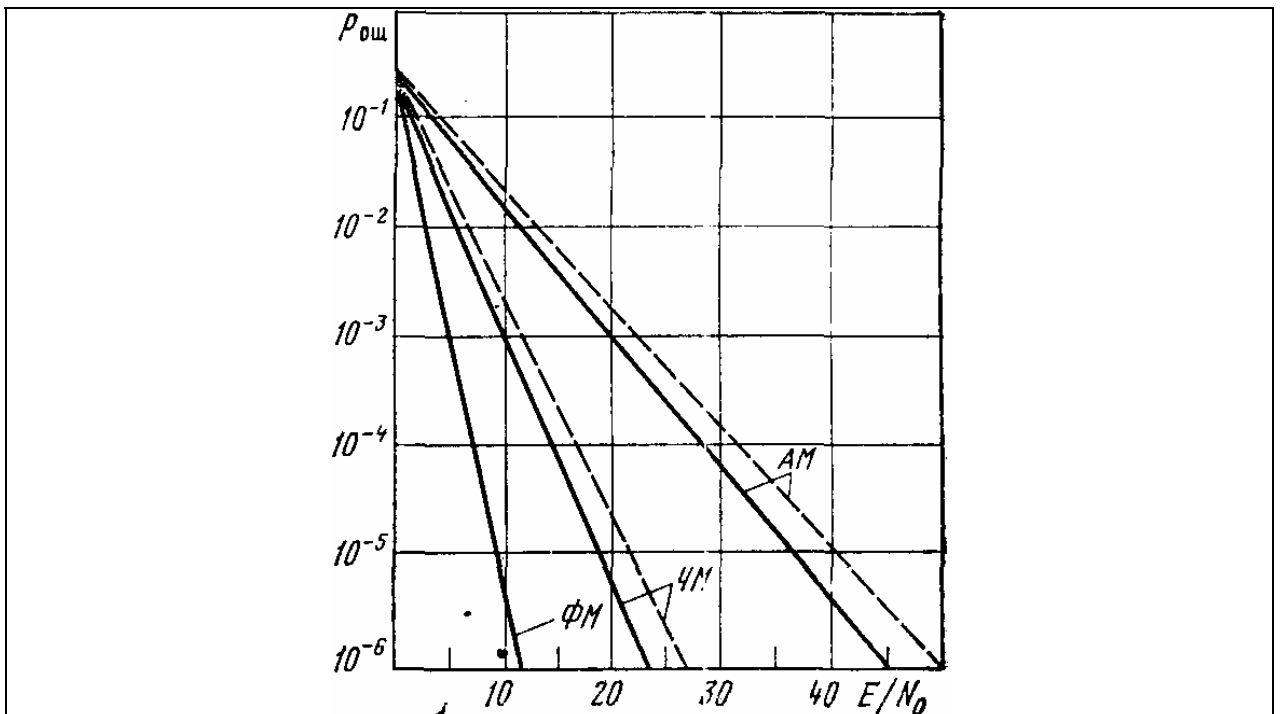


Рис. 5.5. Зависимость вероятности ошибки от отношения  $E/N_0$  для детерминированных сигналов при АМ, ЧМ, ФМ

Таким образом, наибольшей потенциальной помехоустойчивостью обладают фазоманипулированные сигналы. Они обеспечивают выигрыш в энергии сигнала, в два раза по сравнению с частотно-манипулированными сигналами и в четыре раза по сравнению с амплитудно-манипулированными сигналами. Частотно-манипулированные сигналы обеспечивают выигрыш в энергии сигнала по сравнению с амплитудно-манипулированными сигналами в два раза.

Однако следует иметь в виду, что, в отличие от фазовой и частотной манипуляций, при амплитудной манипуляции передается только один сигнал. Поэтому если исходить из среднеэнергетических затрат, то нетрудно видеть, что системы с АМ и ЧМ сигналами обладают одинаковой

помехоустойчивостью.

Заметим, что величина  $\sqrt{2E(1-r_s)}$  представляет собой расстояние между сигналами в векторном пространстве сигналов

$$d = \left[ \int_0^T [s_1(t) - s_2(t)]^2 dt \right]^{1/2}.$$

При этом формулу (5.34) можно записать в виде

$$p_{oui} = 1 - \Phi(d / \sqrt{2N_0}), \quad (5.39)$$

Из (5.39) следует, что при действии в канале гауссовского белого шума вероятность ошибки зависит только от расстояния между сигналами и спектральной плотности шума. Этот вывод оказывается справедливым и для  $m > 2$ .

При высоких требованиях к помехоустойчивости ( $p_{oui} < 10^{-3}$ ) вероятность ошибки удобно определить по приближенной формуле:

$$p_{oui} \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi h^2(1-r_s)}} \exp\left[-\frac{h^2(1-r_s)}{2}\right], \quad p_{oui} < 10^{-3}, \quad (5.40)$$

которая получается при асимптотическом представлении интеграла вероятности

$$\Phi(x) \approx 1 - \frac{\exp(-x^2/2)}{\sqrt{2\pi}x}. \quad (5.41)$$

Точность вычислений по формуле (5.40) не хуже 10%, если  $\sqrt{h^2(1-r_s)} \geq 3$ .

**M-ичные системы передачи информации.** Пусть принятый сигнал имеет вид  $u(t) = s_r(t) + n(t)$ ,  $0 \leq t \leq T$ , где  $s_r(t)$ ,  $r=1, \dots, m$ , ( $m > 2$ ) — возможные полезные сигналы на входе приемника;  $n(t)$  — помеха типа белого гауссовского шума. Будем считать, что вероятность передачи любого сигнала равна  $1/m$ . Тогда решение о том, какой из сигналов  $s_r(t)$ ,  $r=1, \dots, m$ , был передан, принимается на основе анализа  $(m-1)$  неравенств (5.26). Ошибка при приеме сигнала возникает тогда, когда неравенство (5.26) не выполняется хотя бы для одного  $r \neq l$ .

Пусть  $q_1, q_2, \dots, q_m$  — напряжения на выходах каналов различителя, а  $w_n(q_1, q_2, \dots, q_m | s_l)$  —  $n$ -мерная плотность вероятности совокупности, случайных величин  $q_1, q_2, \dots, q_m$  при условии, что на входе приемника действует сигнал  $s_l(t)$ . Тогда с учетом алгоритма работы оптимального различителя вероятность правильного приема сигнала

$$p_{np}(s_l) = \int_{-\infty}^{\infty} dq_l \int_{-\infty}^{q_l} \dots \int_{-\infty}^{q_l} w_n(q_1, \dots, q_m | s_l) dq_1 \dots dq_m \quad (5.42)$$

Соответственно при передаче сигнала вероятность ошибки

$$p_{oui} = 1 - p_{np}(s_l). \quad (5.43)$$

Она при прочих равных условиях зависит от ансамбля применяемых сигналов  $s_r(t)$ ,  $r=1, \dots, m$ . Существует бесконечно большое число систем, отличающихся друг от друга индивидуальными и совместными свойствами сигналов. Представляет интерес система сигналов, обеспечивающая максимальную помехоустойчивость при заданных априорных условиях передачи.

При действии в канале помехи типа белого гауссовского шума помехоустойчивость системы зависит от расстояний между сигналами:

$$d(s_i, s_j) = \left\{ \int_0^T [s_i(t) - s_j(t)]^2 dt \right\}^{1/2}, \quad i, j = 1, \dots, m, \quad (5.44)$$

причем чем больше минимальное из этих расстояний, тем выше помехоустойчивость системы.

Если сигналы имеют одинаковую энергию  $E$ , то (5.44) можно упростить:

$$d(s_i, s_j) = [2E(1 - r_{ij})]^{1/2} \quad (5.45)$$

где  $r_{ij} = \frac{1}{E} \int_0^T s_i(t) s_j(t) dt$  — коэффициент взаимной корреляции между сигналами  $s_i(t)$  и  $s_j(t)$ .

Из (5.45) следует, что для достижения большего расстояния коэффициент взаимной корреляции должен быть как можно меньше. Для обеспечения одинаковой вероятности правильного приема любого сообщения надо потребовать, чтобы все коэффициенты  $r_{ij}$  были одинаковыми, т. е.  $r_{ij} = r_0$  для всех  $i$  и  $j$ ,  $i \neq j$ . Значение  $r_0$  удовлетворяет неравенству  $r_0 \geq -1/(m-1)$ , которое вытекает из следующего соотношения:

$$\int_0^T \left[ \sum_{i=1}^m s_i(t) \right]^2 dt = \int_0^T \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m s_i(t) s_j(t) dt = mE + r_0 E(m^2 - m) \geq 0,$$

Для оптимальной системы сигналов

$$r_0 = -1/(m-1). \quad (5.46)$$

Сигналы  $s_r(t)$ ,  $r=1, \dots, m$ , удовлетворяющие условию

$$\frac{1}{E} \int_0^T s_i(t) s_j(t) dt = \begin{cases} 1, & j = i \\ -1/(m-1), & j \neq i \end{cases}$$

называются *симплексными*, поскольку в  $(m-1)$ -мерном пространстве они образуют правильный симплекс с числом вершин  $m$ . Симплексные сигналы являются *эквиликулированными*, т. е. для всех пар сигналов  $s_i(t)$  и  $s_j(t)$  расстояние  $d(s_i, s_j)$  одинаково.

На практике часто применяют ортогональные сигналы, для которых

$$\frac{1}{E} \int_0^T s_i(t) s_j(t) dt = \begin{cases} 1, & j = i \\ 0, & j \neq i \end{cases}$$

При больших значениях  $m$  ортогональные сигналы по помехоустойчивости



близки к симплексным. Это следует из того, что значение  $r_0$ , определяемое формулой (5.46), при больших  $m$  стремится к нулю. Ортогональные сигналы с равной энергией также являются эквидистантными.

Другой системой, близкой при  $m \gg 1$  к симплексной, является биортогональная система сигналов  $s_r(t)$ ,  $r=1, \dots, m$ , ( $m$  — четное число), которая характеризуется тем, что для каждого сигнала  $s_i(t)$  существует противоположный сигнал  $-s_i(t)$ , а остальные сигналы ортогональны сигналу  $s_i(t)$ . Определить помехоустойчивость  $m$ -ичных систем в общем случае трудно. Однако для равновероятных симплексных, ортогональных и биортогональных сигналов выражение (5.42) существенно упрощается и сводится к однократному интегралу, который можно оценить с помощью численных методов.

**Системы передачи с ортогональными сигналами.** Пусть сигнал на входе приемника имеет вид  $u(t) = s_l(t) + n(t)$ ,  $0 \leq t \leq T$ . Тогда напряжение на выходе  $l$ -го канала

$$q_l = \int_0^T u(t)s_l(t)dt$$

будет представлять собой гауссовую случайную величину с математическим ожиданием  $M\{q_l\} = E$  и дисперсией  $D_{q_l} = EN_0/2$ , а напряжения на выходах остальных каналов будут представлять гауссовские случайные величины с нулевыми математическими ожиданиями и дисперсиями, равными  $EN_0/2$ . Нетрудно показать, что в рассматриваемом случае величины  $q_1, q_2, \dots, q_m$  являются некоррелированными:

$$M\{q_i, q_j\} = 0, \quad i, j = 1, \dots, m; \quad i \neq j,$$

а следовательно, с учетом их распределения и статистически независимыми. При этом  $m$ -мерная плотность вероятности

$$w(q_1, q_2, \dots, q_m) = w(q_1)w(q_2) \dots w(q_m) \quad (5.47)$$

где

$$w(q_l) = \frac{1}{\sqrt{2\pi EN_0/2}} \exp\left\{-\frac{(q_l - E)^2}{EN_0}\right\} \quad (5.48)$$

$$w(q_j) = \frac{1}{\sqrt{2\pi EN_0/2}} \exp\left\{-\frac{(q_j)^2}{EN_0}\right\} \quad (5.49)$$

Подставляя (5.47)—(5.49) в (5.42), после преобразований получаем:

$$p_{np}(s_l) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) \Phi^{m-1}\left(x + \sqrt{\frac{2E}{N_0}}\right) dx$$

где  $\Phi(x)$  — интеграл вероятности.

Нетрудно видеть, что вероятность правильного приема оказывается одинаковой для всех сигналов  $s_r(t)$ ,  $r=1, \dots, m$ . Поэтому полная вероятность ошибки

$$P_{ош} = 1 - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}(x - \sqrt{\frac{2E}{N_0}})^2} \Phi^{m-1}(x) dx \quad (5.50)$$

Из (5.50) следует, что при прочих равных условиях с увеличением числа сигналов  $m$  вероятность ошибки возрастает. Физически это объясняется увеличением вероятности превышения шумом на выходе какого-либо канала (в момент принятия решения) напряжения на выходе канала, принимающего полезный сигнал. Однако это не означает, что потенциальная помехоустойчивость  $m$ -ичных систем меньше, чем двоичных. При сравнении систем необходимо иметь в виду, что каждый равновероятный  $m$ -ичный сигнал несет в  $\log_2 m$  раз большее количество информации, чем двоичный сигнал, или при той же скорости передачи информации имеет в  $\log_2 m$  большую длительность.

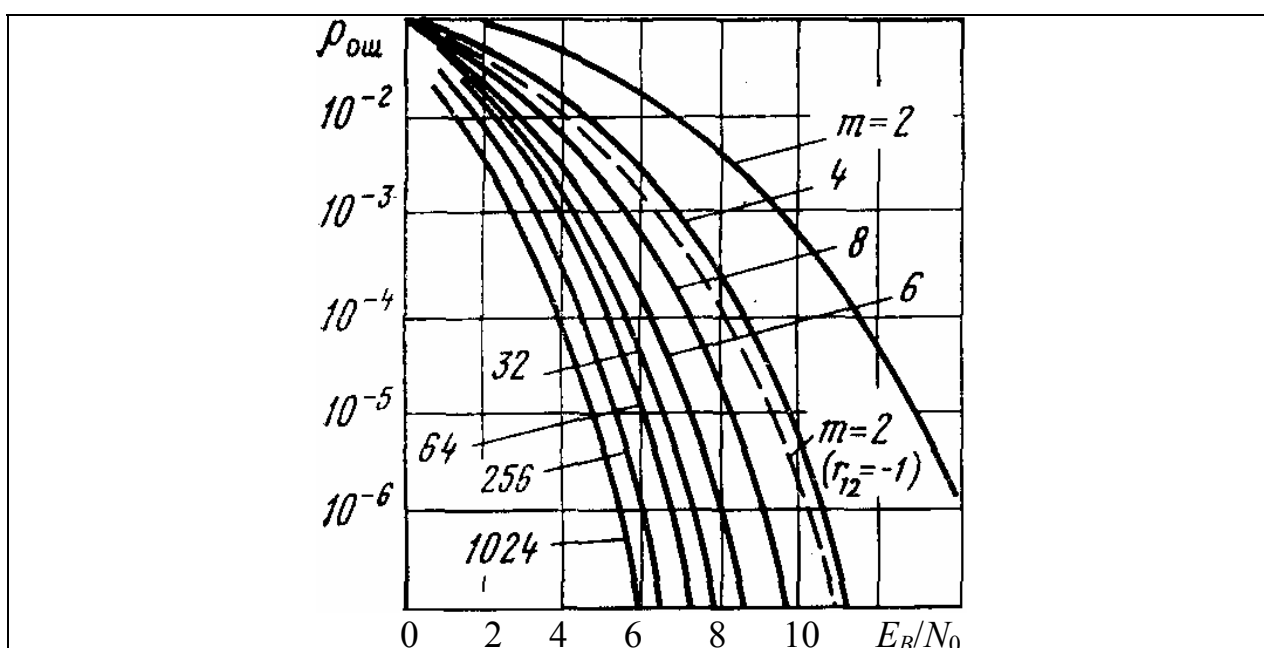


Рис. 5.6. Зависимость вероятности ошибки от отношения  $E_B/N_0$  при оптимальном приеме  $m$  детерминированных ортогональных сигналов

На рис. 5.6 построены зависимости вероятности ошибки при когерентном приеме  $m$ -ичных ортогональных сигналов от отношения  $h_m^2 = E_B/N_0$ , где  $E_B = E/\log_2 m$  — энергия, затрачиваемая на 1 бит информации.

Системы ортогональных сигналов с  $m > 2$  позволяют обеспечить при одинаковой скорости передачи информации существенный выигрыш в энергетике по сравнению с двоичными сигналами. Так, при  $m=32$  и  $p_{ош}=10^{-5}$  он составляет почти два раза.

Платой за энергетический выигрыш является увеличение ширины полосы частот, занимаемой системой, и усложнение приемника, который для сигналов с одинаковыми энергиями содержит  $m$  корреляторов (по числу сигналов) и решающее устройство.

**Системы передачи с симплексными сигналами.** Вероятность ошибки  $p_{ош}$  в системе с симплексными сигналами  $s_r(t)$ ,  $r=1, \dots, m$ , связана

простым соотношением с вероятностью ошибки для ортогональных сигналов. Действительно, пусть  $s_r(t)$ ,  $r=1, \dots, m$ , - симплексные сигналы. образуем новый ансамбль сигналов длительностью  $T(1 + |r_0|)$ :

$$s'_r(t) = \begin{cases} s_r(t), & 0 \leq t \leq T \\ \sqrt{E/T}, & T \leq t \leq T(1 + |r_0|), \end{cases} \quad (5.51)$$

где  $r_0 = -1/(m-1)$ .

Сигналы (5.51) являются ортогональными.

Энергия каждого сигнала  $s'_r(t)$  равна  $E(1 + |r_0|)$ .

Учитывая, что передача сигналов на интервале времени  $T \leq t \leq T(1 + |r_0|)$  одинаково влияет на выходные напряжения всех  $m$  каналов (на этом интервале времени все сигналы одинаковы), можно утверждать, что вероятность ошибки для исходного ансамбля сигналов равна вероятности ошибки для ортогонального ансамбля сигналов с энергией  $E(1 + |r_0|)$ . Таким образом, вероятность ошибки для симплексных сигналов определяется как

$$P_{ош} = 1 - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}(x - \sqrt{\frac{2E}{N_0} \frac{m}{m-1}})^2} \Phi^{m-1}(x) dx$$

Зависимость вероятности ошибки от отношения  $h^2_m = E_B/N_0$  для симплексных сигналов можно проследить по рис. 5.6, если по оси абсцисс вместо  $E_B/N_0$  отложить величину  $(E_B/N_0)[m/(m-1)]$ .

Помехоустойчивость симплексных сигналов выше, чем ортогональных. Однако это различие уменьшается с увеличением  $m$  и при  $m \gg 1$  помехоустойчивость обеих ансамблей оказывается практически одинаковой.

**Системы передачи с биортогональными сигналами.** Оптимальный различитель биортогональных сигналов состоит из набора  $m/2$  корреляторов, устройства нахождения максимального по абсолютной величине напряжения на их выходах и устройства определения знака этого напряжения.

При передаче любого сигнала  $s_l(t)$  ошибка отсутствует, если выполняются неравенства:

$$q_l > 0, |q_l| > \max \{ |q_1|, |q_2|, \dots, |q_{l-1}|, |q_{l+1}|, \dots, |q_{m/2}| \}.$$

Вероятность правильного приема любого сигнала

$$P_{np}(s_l) = \int_0^{\infty} dq_l \int_{-q_l}^{q_l} \dots \int_{-q_l}^{q_l} w_{m/2}(q_1, q_2, \dots, q_{m/2} | s_l) dq_1 dq_2 \dots dq_{m/2}.$$

Случайные величины  $q_1, \dots, q_{m/2}$  являются статистически независимыми и распределены так же, как и для ортогональных сигналов. Это позволяет вывести следующее выражение для вероятности ошибки:

$$P_{ош} = 1 - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} e^{-\frac{1}{2}(x - \sqrt{\frac{2E}{N_0}})^2} [2\Phi(x) - 1]^{m/2-1} dx$$

Помехоустойчивость биортогональных сигналов выше, чем ортогональных. Однако при  $m \gg 2$  эта разница становится пренебрежимо малой.

Как уже указывалось, вычислить вероятность ошибки в  $m$ -ичной системе в общем случае трудно. Поэтому на практике часто пользуются верхней границей для вероятности ошибки

$$p_{ou}(s_l) \leq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq l}}^m p_{ou}(s_j | s_l), \quad (5.52)$$

где  $p_{ou}(s_j | s_l)$  — вероятность ошибки при передаче сигнала  $s_l(t)$  в двоичной системе, использующей сигналы  $s_l(t)$  и  $s_j(t)$ . Оценка (5.52) справедлива для любой системы сигналов и любого канала.

Более простой, но менее точной является верхняя граница, определяемая как

$$p_{ou} \leq (m-1) \max p_{ou}(s_j | s_l), \quad (5.53)$$

где  $\max p_{ou}(s_j | s_l)$  — максимальная по всем парам  $l, j$  вероятность ошибки в двоичной системе, использующей эти сигналы.

### 5.2.3. ВЫБОР И ФОРМИРОВАНИЕ СИГНАЛОВ

**Ортогональные сигналы.** В общем случае ортогональные сигналы можно сформировать следующим образом. Пусть  $\varphi_j(t), j=1, \dots, N$ , — некоторая полная ортонормированная система функций. Любой сигнал  $s_i(t), i=1, \dots, m$ , с полосой частот  $F_c$  можно представить в виде

$$s_i = \sum_{j=1}^N a_{ij} \varphi_j(t)$$

где  $N=2F_c T$  — число отсчетов на интервале  $T$  по теореме Котельникова,

$$a_{ij} = \int_0^T s_i(t) \varphi_j(t) dt$$

— коэффициенты разложения.

Геометрически сигнал  $s_i(t)$  можно представить вектором в  $N$ -мерном пространстве с координатами  $(a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{iN})$ . Сигналы  $s_i(t), i=1, \dots, m$ , будут ортогональны, если для любого  $i$ -го сигнала удовлетворяется соотношение

$$\begin{aligned} a_{ij} &= a_{ji}, \\ a_{ij} &= 0, \quad i \neq j \end{aligned}$$

Пусть в качестве примера базисные функции

$$\varphi_j(t) = \begin{cases} \sqrt{2/T} \sin \omega_j t, & 0 \leq t \leq T \\ 0, & \text{при других } t, \end{cases}$$

где частоты  $\omega_j, j=1, \dots, m$ , выбираются из условия обеспечения ортогональности функций  $\varphi_j(t), j=1, \dots, m$ . Тогда сигналы

$$s_i(t) = \sqrt{2E/T} \sin \omega_i t, \quad 0 \leq t \leq T, \quad i=1, \dots, m,$$

образуют ортогональную систему. Они получаются путем многопозиционной частотной манипуляции.

Существует бесконечно большое число ортогональных систем функций, на основе которых могут быть сформированы ортогональные сигналы. На практике часто для этого используют ортогональные коды. При этом сами сигналы получают путем фазовой манипуляции несущего колебания по закону кодовых комбинаций.

В общем случае построение ортогональных кодов связано с матрицами Адамара, под которыми понимаются квадратные ортогональные матрицы с элементами  $\pm 1$ . Поэтому строки (или столбцы) матрицы Адамара можно использовать для формирования комбинаций ортогонального кода (символ  $-1$  заменяется символом  $0$ ).

Укажем два основных положения, касающихся вопросов существования и построения матриц Адамара. Матрицы Адамара имеют порядок либо  $N=2$ , либо  $N=4k$ ,  $k = 1, 2, \dots$

Матрица  $\mathbf{A}_{N1 \times N2}$  порядка  $N1 \times N2$ , полученная из матрицы Адамара  $\mathbf{A}_{N1}$  подстановкой матрицы Адамара  $\mathbf{A}_{N2}$ , вместо элемента  $+1$  и  $-\mathbf{A}_{N2}$ , вместо элемента  $-1$ , есть тоже матрица Адамара. Таким способом можно легко строить матрицы Адамара более высокого порядка.

Если первая строка и первый столбец матрицы Адамара состоят из единиц, то говорят, что матрица записана в нормальной форме.

Ортогональные коды можно построить на основе системы функций Уолша, которые достаточно просто генерируются.

**Биортогональные сигналы.** Для построения системы из  $m$  биортогональных сигналов берется система из  $m/2$  ортогональных сигналов и к каждому из них добавляется противоположный. Простейшим биортогональным является ансамбль из четырех сигналов с одинаковой энергией.

Если в качестве базисных функций  $\varphi_j(t)$  использовать

$$\varphi_1(t) = \sqrt{2/T} \cos \omega_0 t, \quad \varphi_2(t) = \sqrt{2/T} \sin \omega_0 t, ,$$

то при  $m=4$  биортогональные сигналы отличаются только фазой и совпадают с сигналами, полученными фазовой манипуляцией.

#### **Симплексные сигналы.**

В общем случае они получаются из ортогональных сигналов следующим образом. Пусть  $s_i(t)$ ,  $I = 1, \dots, m$ , — ортогональные сигналы. Добавив к каждому сигналу  $s_i(t)$ ,  $I = 1, \dots, m$ , один и тот же сигнал  $s(t)$ , получим новую систему сигналов  $s_i'(t) = s_i(t) + s(t)$ . Заметим, что обе системы сигналов обеспечивают одинаковую помехоустойчивость. Суммарная энергия новых сигналов

$$E_{\Sigma} = \sum_{i=1}^m \int_0^T [s_i(t) + s(t)]^2 dt. \quad (5.54)$$

Для симплексных сигналов  $E_{\Sigma}$  должна быть минимальной. Минимизируя выражение (5.54) по  $s(t)$ , можно показать, что симплексные сигналы,

получаемые на основе ортогональных  $s_i(t)$ ,  $I = 1, \dots, m$ , имеют вид

$$s_i^{cumn}(t) = s_i^{opm}(t) - \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m s_i^{opm}(t) \quad (5.55)$$

Так как с учетом (5.55)

$$\sum_{i=1}^m s'_i(t) = 0,$$

то каждый из сигналов  $s'_i(t)$  можно представить в виде линейной комбинации остальных. Отсюда следует, что симплексные сигналы можно представить в виде векторов, в  $m - 1$ -мерном евклидовом пространстве.

Задаваясь одной базисной функцией  $\varphi(t)$ , можно сформировать два симплексных сигнала, которые совпадут с противоположными сигналами.

Задаваясь двумя базисными функциями, можно сформировать три симплексных сигнала. Концы их векторов лежат в вершинах равностороннего треугольника.

Симплексные сигналы могут быть получены на основе симплексных кодов. Рассмотрим равномерный код с основанием 2 и длиной  $m$ . Пусть его кодовые комбинации представляют последовательности из  $m$  символов, принимающих значения  $-1$  и  $1$ . Введем понятие коэффициента взаимной корреляции между любой парой комбинаций  $B_i$  и  $B_j$ :

$$r_{ij} = \frac{1}{m} \sum_{k=0}^{m-1} b_{ik} b_{jk}.$$

Потребуем, чтобы коэффициенты взаимной корреляции  $r_{ij} = r_0$ ,  $i, j = 1, \dots, m$ ;  $i \neq j$ . Можно показать, что

$$\begin{aligned} r_0 &\geq -1/(m - 1), \text{ если } m \text{ — четное число,} \\ r_0 &\geq -1/m, \text{ если } m \text{ — нечетное число,} \end{aligned}$$

Код, все пары кодовых комбинаций которого имеют коэффициенты взаимной корреляции

$$\begin{aligned} r_0 &= -1/(m - 1), \text{ если } m \text{ — четное число,} \\ r_0 &= -1/m, \text{ если } m \text{ — нечетное число,} \end{aligned}$$

называется симплексным. Соответствующее название носят сигналы, полученные на его основе, например, путем фазовой манипуляции несущей.

Симплексные коды можно построить на основе матриц Адамара.

Нетрудно показать, что если существует матрица Адамара порядка  $N=4k$ , то можно построить симплексные коды для  $m=4k$ ,  $4k-1$ ,  $2k$  и  $2k-1$ , где  $k$  — целое положительное число. Действительно, пусть  $\mathbf{A}_N$  — матрица Адамара порядка  $N=4k$ , записанная в нормальной форме. Тогда, зачеркнув первый столбец, получаем матрицу, строки которой образуют симплексный код для  $m=4k$ . Если, кроме того, вычеркнуть одну из строк, то получим симплексный код для  $m = 4k - 1$ .

Коды для  $m=2k$  и  $m=2k-1$  получаются следующим образом. Возьмем любой  $j$ -й столбец ( $j \neq 1$ ) и вычеркнем в матрице  $\mathbf{A}_N$  строки, на которых

элементы  $j$ -го столбца равны 1 (или  $-1$ ). Вычеркнем также первый и  $j$ -й столбцы. Тогда оказывается, что оставшиеся строки образуют симплексный код для  $m=2k$ . Если вычеркнуть еще одну строку, то получим симплексный код для  $m=2k-1$ .

Особый интерес представляют симплексные коды, комбинации которых являются циклическими перестановками одной из них.

**Амплитудно-фазоманипулирующие сигналы.** Системы сигналов с  $m>2$  можно также построить путем манипуляции какого-либо одного параметра переносчика. Число возможных дискретных значений манипулированного параметра должно быть равно  $m$ . При изменении частоты получают многочастотные сигналы, а при изменении фазы — многофазные.

Можно одновременно изменять несколько параметров переносчика, например амплитуду и фазу, частоту и фазу и т. п. В последнее время большой интерес проявляется к сигналам, полученным манипуляцией амплитуды и фазы.

Амплитудно-фазоманипулированные (АФМ) сигналы описываются как

$$s_i(t) = \sqrt{2/T} a_i \cos \omega t - \sqrt{2/T} b_i \sin \omega t, \quad 0 \leq t \leq T, \quad i=1, \dots, m \quad (5.58)$$

или как

$$s_i(t) = \sqrt{2/T} U_i \cos(\omega t + \psi_i), \quad (5.59)$$

где  $U_i = \sqrt{a_i^2 + b_i^2}$ ,  $\psi_i = \arctg(b_i/a_i)$

Используя функции  $\varphi_1(t) = \sqrt{2/T} \cos \omega_0 t$ ,  $\varphi_2(t) = -\sqrt{2/T} \sin \omega_0 t$ , в качестве базисных, сигнал  $s_i(t)$  в соответствии с (5.58) и (5.59) можно рассматривать либо как двумерный вектор с координатами  $a_i$  и  $b_i$  в декартовой системе, либо как вектор с амплитудой  $U_i$  и фазой  $\psi_i$  в полярной системе координат.

В принципе для каждого числа  $m$  можно построить бесконечно большое число ансамблей АФМ сигналов. Поэтому важной является задача нахождения оптимальных ансамблей.

Пользуясь геометрической трактовкой, каждому сигналу  $s_i(t)$  можно поставить в соответствие некоторую область пространства сигналов, которую обычно называют собственной областью или областью правильного приема. Для дискретных сообщений вероятность правильного приема есть вероятность попадания конца вектора принятого сигнала в собственную область  $S_i$ , передаваемого сигнала  $s_i(t)$ .

При равновероятной передаче сообщений оптимизация ансамбля заключается в таком размещении сигнальных точек, при котором собственные области  $S_i$   $i=1, \dots, m$ , примерно одинаковы и имеют максимальный объем (площадь). Эта задача сводится в общем случае к плотнейшей укладке сфер одинакового радиуса в  $m$ -мерном пространстве

сигналов или, как в рассматриваемом случае, к плотнейшей укладке окружностей на плоскости. При этом центры сфер или окружностей соответствуют сигнальным точкам.

Большинство известных ансамблей АФМ сигналов найдены эвристическим методом. На рис. 5.8,а показаны ансамбли сигналов на основе так называемой треугольной сети для  $m=3, 7, 19$ . Сигнальные точки лежат в вершинах правильных треугольников, а собственные области сигналов (за исключением периферийных) имеют вид правильных шестиугольников. На рис. 5.8,б представлены ансамбли сигналов на основе квадратной сети, а на рис. 5.8,в — различные варианты круговых расположений сигнальных точек. В последнем случае ансамбли обозначаются как  $(i_1, i_2, \dots, i_k)$ , где  $i_j$  — величина, равная числу сигнальных точек на  $j$ -й окружности. Радиусы окружностей  $r$ , или отношения радиусов должны быть заданы.

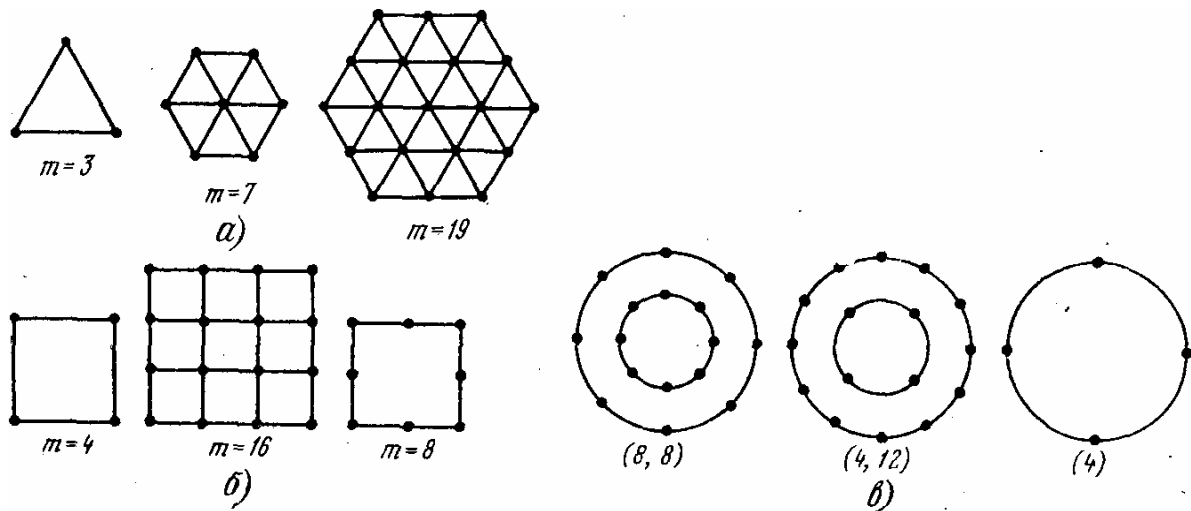


Рис. 5.8. Ансамбли АФМ сигналов

Класс АФМ сигналов включает в себя сигналы с  $m$ -ичной фазовой манипуляцией, которые определяются как

$$s_i(t) = A_0 \cos(\omega_0 t + 2\pi i/m), \quad i = 1, \dots, m.$$

Они образуют круговую сеть с равномерным распределением точек по окружности.

Методы формирования АФМ сигналов зависят от вида ансамбля, требований к точности и быстродействию модуляторов. При задании в декартовой системе координат (рис. 5.9) передаваемые двоичные символы поступают на цифроаналоговые преобразователи (ЦАП) блоками длиной  $k = \log_2 m$ . Вырабатываемые ЦАП сигналы  $a_i$  и  $b_i$  модулируют квадратурные составляющие несущего колебания в балансных модуляторах (БМ).

В схеме формирования АФМ сигналов, заданных в полярной системе координат (рис. 5.10), ЦАП вырабатывает из двоичных символов сигналы, используемые для модуляции несущей последовательно в фазовом (ФМ) и амплитудном (АМ) модуляторах.



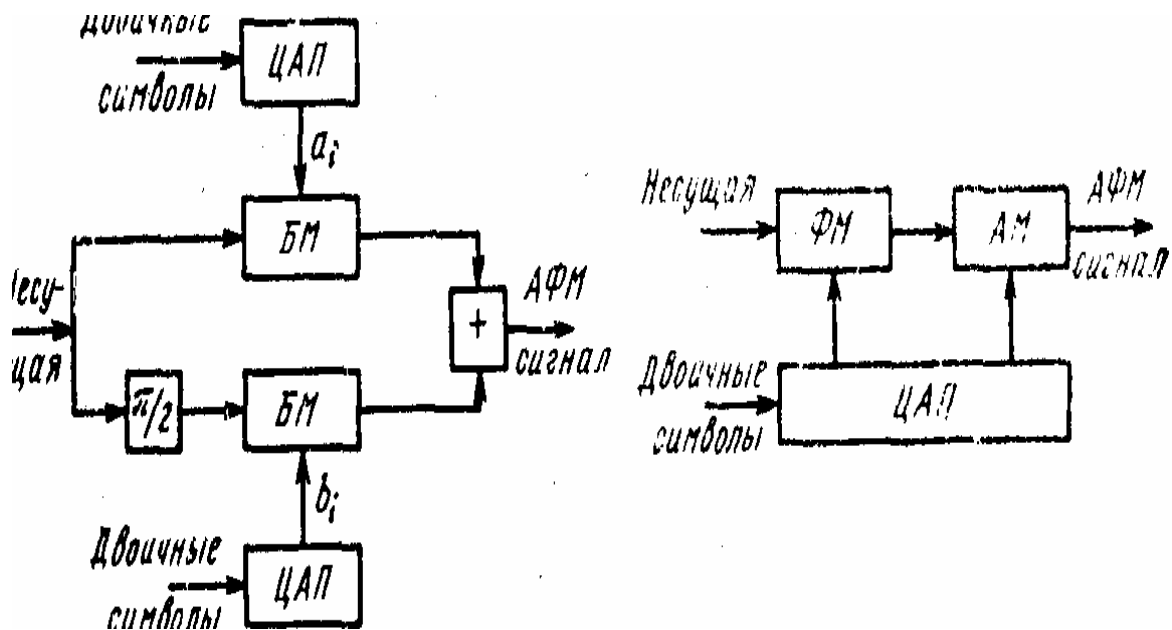


Рис. 5.9. Структурная схема формирователя АФМ сигналов, заданных в декартовой системе координат

Рис. 5.10. Структурная схема формирователя АФМ сигналов, заданных в полярной системе координат

Существуют и другие методы формирования АФМ сигналов.  
Вычисление средней вероятности ошибки

$$P_{ош} = \sum_{i=1}^m P_{ош}(s_i) p(s_i)$$

при использовании АФМ сигналов в общем случае является весьма громоздким, что обусловлено необходимостью перебора всех собственных областей  $S_i$   $i=1, \dots, m$ , которые, как правило, имеют различную форму и сложную конфигурацию.

Решение задачи упрощается при больших отношениях сигнал-шум. При этом можно воспользоваться верхней границей для вероятности ошибки (5.52) или (5.53).

При работе системы в условиях действия гауссовского белого шума с односторонней спектральной плотностью  $N_0$  вероятность ошибки, выраженная через расстояние  $d(s_i, s_j)$ , находится как

$$P_{ош}(s_j | s_l) = 1 - \Phi[d(s_j, s_l) / \sqrt{2N_0}]$$

Тогда

$$P_{ош}(s_l) \leq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq l}}^m \left\{ 1 - \Phi \left[ \frac{d(s_l, s_j)}{\sqrt{2N_0}} \right] \right\}$$

Используя приближение интеграла вероятности в виде (5.41), можно записать

$$p_{ouu}(s_l) \approx \sum_{\substack{j=1, \\ j \neq l}}^m \frac{\exp[-d^2(s_l, s_j)/4N_0]}{\sqrt{2\pi d(s_l, s_j)}/\sqrt{2N_0}}$$

Соответственно средняя вероятность ошибки

$$p_{ouu} \approx \sum_{l=1}^m \sum_{\substack{j=1, \\ j \neq l}}^m \frac{\exp[-d^2(s_l, s_j)/4N_0]}{\sqrt{2\pi d(s_l, s_j)}/\sqrt{2N_0}} p(s_l)$$

что дает удовлетворительную точность при  $p_{ouu} < 0,01$ .

Расчеты показывают, что при  $m \geq 8$  системы с АФМ сигналами обладают более высокой помехоустойчивостью, чем  $m$ -ичные системы с фазовой манипуляцией. Так, при  $p_{ouu} = 10^{-5}$  и  $m=8$  проигрыш в средней энергии системы с фазовой манипуляцией по сравнению с системой, использующей оптимальный ансамбль сигналов, составляет 1,7 дБ, при  $m = 16$  — 4,3 дБ, при  $m=32$  — 7,1 дБ, при  $m=64$  — 10,1 дБ, при  $m=128$  — 13,1 дБ. Анализ этих результатов позволяет также сделать вывод, что многие из известных ансамблей АФМ сигналов, построенных на основе треугольной и квадратной сетей, и ансамблей с круговым расположением сигнальных точек практически обеспечивают одинаковую помехоустойчивость. По крайней мере, могут быть построены различные типы систем АФМ сигналов, проигрыш которых в средней энергии по сравнению с оптимальными системами не будет превышать 0,5 дБ. Это позволяет выбирать сигналы из соображений простоты построения модулятора и демодулятора.

При выборе ансамбля сигналов необходимо иметь в виду следующее. Все многопозиционные сигналы можно разделить на два класса. К одному из них принадлежат сигналы, для которых характерно, что с увеличением объема ансамбля  $m$  растет энергетическая эффективность, но при этом расширяется полоса частот, занимаемая сигналами (снижается частотная эффективность). К этому классу относятся ортогональные, биортогональные и симплексные сигналы. При  $m \gg 1$  они обеспечивают практически одинаковую помехоустойчивость и являются наилучшими. В то же время их полосы частот по сравнению с двоичными противоположными сигналами шире соответственно в  $m/\log_2 m$ ,  $m/2 \log_2 m$  и  $(m-1)/\log_2 m$  раз при той же скорости передачи информации.

К другому классу принадлежат сигналы, для которых характерно, что с увеличением объема ансамбля  $m$  расстояние между сигналами уменьшается (снижается энергетическая эффективность), а полоса частот, занимаемая сигналами, не увеличивается (повышается частотная эффективность). К этому классу относятся АФМ сигналы. Очевидно, что применение АФМ сигналов требует высокой линейности и стабильности параметров приемопередающего тракта.

### Лекция 3. Помехоустойчивость систем цифровой радиосвязи с некогерентной обработкой сигналов

#### 5.3. СИСТЕМЫ ПЕРЕДАЧИ С НЕКОГЕРЕНТНОЙ ОБРАБОТКОЙ СИГНАЛОВ

##### 5.3.1. АЛГОРИТМ ОПТИМАЛЬНОГО ДЕМОДУЛЯТОРА

В отличие от когерентного приема в данном случае начальная фаза высокочастотного заполнения сигнала полагается неизвестной и случайной. Подобная ситуация действительно часто имеет место из-за условий распространения радиосигнала, а также использования некоторых методов формирования сигналов. С другой стороны, для упрощения приемного устройства часто оказывается целесообразным не измерять начальную фазу даже тогда, когда она не является случайной и сохраняет свое значение на протяжении большого числа передаваемых сигналов. Таким образом, сигнал на входе приемника

$$u(t) = s_r(t, \varphi_r) + n(t),$$

где  $s_r(t, \varphi_r) = \operatorname{Re} \xi_r(t) e^{-j\varphi_r}$  — случайная начальная фаза, а  $\xi_r(t)$  — аналитический сигнал, соответствующий вещественному  $s_r(t)$ . Представим  $s_r(t, \varphi_r)$  в виде

$$s_r(t, \varphi_r) = \operatorname{Re} \xi_r(t) \cos \varphi_r + \operatorname{Im} \xi_r(t) \sin \varphi_r = s_r(t) \cos \varphi_r + \hat{s}_r(t) \sin \varphi_r,$$

где  $\hat{s}_r(t)$  — преобразование по Гильберту  $s_r(t)$ .

В рассматриваемых условиях входящий в функционал отношения правдоподобия (5.23) интеграл

$$\int_0^T u(t) s_r(t, \varphi_r) dt = V_r \cos(\varphi_r + \psi_r),$$

где

$$V_r = \sqrt{\left[ \int_0^T u(t) s_r(t) dt \right]^2 + \left[ \int_0^T u(t) \hat{s}_r(t) dt \right]^2},$$

$$\operatorname{tg} \psi_r = - \frac{\int_0^T u(t) \hat{s}_r(t) dt}{\int_0^T u(t) s_r(t) dt}.$$

Таким образом, функционал отношения правдоподобия  $\Lambda(\mathbf{u})$  приобретает форму

$$\Lambda(u | \varphi_1, \varphi_2) = \frac{\exp \left[ -\frac{E_1}{N_0} + \frac{2V_1}{N_0} \cos(\varphi_1 + \psi_1) \right]}{\exp \left[ -\frac{E_2}{N_0} + \frac{2V_2}{N_0} \cos(\varphi_2 + \psi_2) \right]}.$$

Положим распределение величины  $\varphi$  равномерным, т. е.  $w(\varphi) = 1/2\pi$ ,  $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ . Тогда, усредняя числитель и знаменатель функционала отношения правдоподобия в соответствии с (5.11), имеем

$$\bar{\Lambda}(\mathbf{u}) = \frac{\int_0^{2\pi} \exp\left[-\frac{E_1}{N_0} + \frac{2V_1}{N_0} \cos(\varphi_1 + \psi_1)\right] d\varphi}{\int_0^{2\pi} \exp\left[-\frac{E_2}{N_0} + \frac{2V_2}{N_0} \cos(\varphi_2 + \psi_2)\right] d\varphi}$$

Учитывая, что

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \exp[a \cos(\varphi + \psi)] d\varphi = I_0(a),$$

где  $I_0(a)$  — модифицированная функция Бесселя первого рода нулевого порядка, получаем

$$\bar{\Lambda}(\mathbf{u}) = \frac{\exp\left[-\frac{E_1}{N_0}\right] I_0\left(\frac{2V_1}{N_0}\right)}{\exp\left[-\frac{E_2}{N_0}\right] I_0\left(\frac{2V_2}{N_0}\right)}.$$

Тогда алгоритм оптимального демодулятора с учетом (5.11) и (5.9) записывается в виде: регистрируется сигнал  $s_1(t)$ , если

$$\ln I_0(2V_1/N_0) - \ln I_0(2V_2/N_0) \geq (E_1 - E_2)/N_0 \quad (5.60)$$

При  $E_1 = E_2$  условие (5.60) принимает вид

$$V_1 \geq V_2 \quad (5.61)$$

В общем случае  $m > 2$ , полагая, что сигналы равновероятны, алгоритм оптимального некогерентного приема аналогично (5.26) можно представить в форме: регистрируется  $s_l(t)$ , если

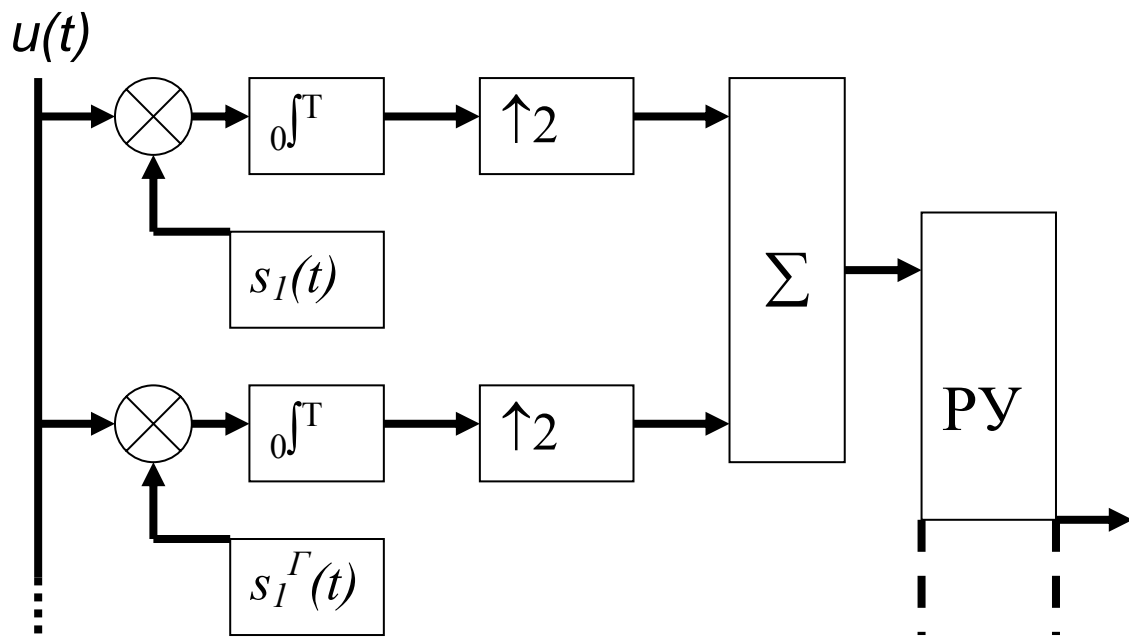
$$\ln I_0(2V_l/N_0) - E_l/N_0 \geq \ln I_0(2V_r/N_0) - E_r/N_0 \quad (5.62)$$

где  $l, r = 1, \dots, m; l \neq r$ .

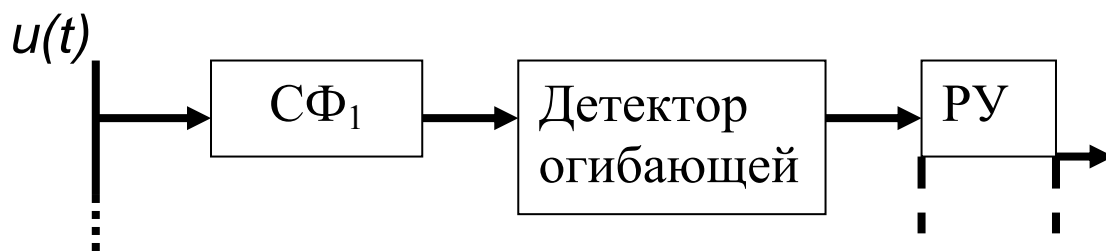
Как и при когерентном приеме, алгоритм (5.62) существенно упрощается, когда  $E_r = E$  для всех  $r = 1, \dots, m$ . При этом неравенства (5.62) приобретают вид

$$V_l \geq V_r, \quad l, r = 1, \dots, m; l \neq r. \quad (5.63)$$

Реализация алгоритма (5.63) возможна на основе корреляторов (рис. 5.11,а) и согласованных фильтров (рис. 5.11,б).



а) Корреляционная схема



б) Согласованные фильтры

Рис. 5.11. Структурные схемы некогерентных демодуляторов  $m$  сигналов с использованием корреляторов (а) и согласованных фильтров (б)

### 5.3.2. ПОТЕНЦИАЛЬНАЯ ПОМЕХОУСТОЙЧИВОСТЬ

**Двоичные системы передачи информации.** Пусть сигнал на входе приемника имеет вид

$$u(t) = \lambda s_1(t, \varphi_1) + (1 - \lambda) s_2(t, \varphi_2) + n(t),$$

где  $\lambda$  — случайная величина, принимающая значение 1 и 0 с вероятностями  $p_1$  и  $p_2$  соответственно,  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  — начальные фазы, представляющие собой независимые случайные величины, распределенные равномерно в интервале  $[-\pi, \pi]$ ,  $n(t)$  — помеха типа белого гауссовского шума со спектральной плотностью  $N_0/2$ .

В качестве полезных сигналов  $s_i(t)$ ,  $i=1, 2$ , в данном случае нельзя использовать противоположные сигналы, отличающиеся сдвигом фаз на  $\pi$ , так как при неизвестной начальной фазе такие сигналы неразличимы. Поэтому оценим помехоустойчивость для ортогональной системы сигналов.

**Ортогональные системы с активной паузой.** Рассмотрим передачу сигналов  $s_1(t)$  и  $s_2(t)$ , ортогональных в усиленном смысле. Для них

$$\begin{cases} \int_0^T s_1(t)s_2(t)dt = 0 \\ \int_0^T s_1(t)\hat{s}_2(t)dt = 0 \end{cases} \quad (5.64)$$

Примером таких сигналов являются частотно-манипулированные сигналы  $s_1(t)=A_0\cos(\omega_1t+\varphi_1)$ ,  $s_2(t)=A_0\cos(\omega_2t+\varphi_2)$ , где  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  - произвольные начальные фазы, а частоты  $\omega_1$  и  $\omega_2$  удовлетворяют соотношениям  $(\omega_2-\omega_1)T=2\pi k$ ,  $k=1,2,\dots$ . Характерной особенностью ортогональных в усиленном смысле сигналов является следующее: если на вход согласованного фильтра, настроенного на сигнал  $s_2(t)$ , подать сигнал  $s_1(t)$ , то значение огибающей выходного напряжения в момент  $t=T$  равно 0.

Исследование показывает, что ортогональные в усиленном смысле сигналы с активной паузой обеспечивают в канале с неопределенной фазой и аддитивной гауссовской помехой минимальную вероятность ошибки, т. е. они являются оптимальными для указанных условий.

Положим, что  $p_1 = p_2$  и  $E_1 = E_2 = E$ .

Пусть для определенности передается сигнал  $s_1(t)$ . Тогда с учетом (5.61) ошибка возникает, если выполняется неравенство  $V_1 < V_2$ .

В данном случае значение огибающей

$$V_2 = \left\{ \left[ \int_0^T s_1(t)s_2(t)dt + \int_0^T n(t)s_2(t)dt \right]^2 + \left[ \int_0^T s_1(t)\hat{s}_2(t)dt + \int_0^T n(t)\hat{s}_2(t)dt \right]^2 \right\}^{1/2}.$$

Учитывая (5.64), получаем

$$V_2 = \left\{ \left[ \int_0^T n(t)s_2(t)dt \right]^2 + \left[ \int_0^T n(t)\hat{s}_2(t)dt \right]^2 \right\}^{1/2} = (\zeta_2^2 + \hat{\zeta}_2^2)^{1/2}.$$

Случайные величины  $\zeta_2$  и  $\hat{\zeta}_2$  имеют нормальное распределение с нулевым математическим ожиданием и дисперсией  $\sigma^2 = EN_0/2$ . Кроме того, математическое ожидание  $M\{\zeta_2 \hat{\zeta}_2\} = 0$  и, следовательно, эти величины статистически независимы. Поэтому огибающая  $V_2$  будет распределена по закону Рэлея (рис. 5.12)

$$w(V_2 | s_1) = \frac{2V_2}{EN_0} \exp\left(-\frac{V_2^2}{EN_0}\right). \quad (5.65)$$

Значение огибающей  $V_1$  определяется как

$$\begin{aligned} V_1 &= \left\{ \left[ \int_0^T s_1(t)s_1(t)dt + \int_0^T n(t)s_1(t)dt \right]^2 + \left[ \int_0^T s_1(t)\hat{s}_1(t)dt + \int_0^T n(t)\hat{s}_1(t)dt \right]^2 \right\}^{1/2} = \\ &= \left\{ (E + \zeta_1)^2 + \hat{\zeta}_1^2 \right\}^{1/2}. \end{aligned}$$

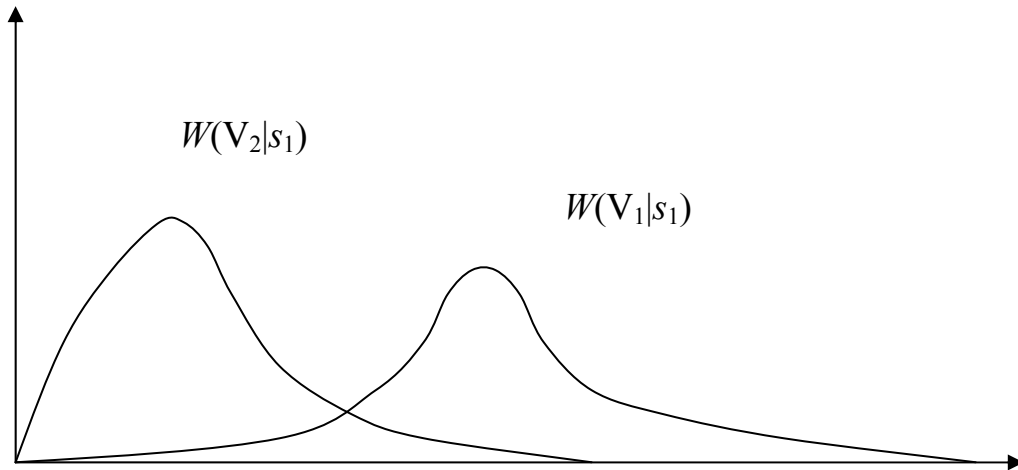


Рис. 5.12. Плотности вероятности огибающих сигналов на выходах согласованных фильтров(при ортогональных входных сигналах)

Случайные величины  $\zeta_1$  и  $\hat{\zeta}_1$  как и  $\zeta_2$  и  $\hat{\zeta}_2$ , имеют нормальное распределение с нулевым математическим ожиданием и дисперсией  $\sigma^2 = EN_0/2$  и являются статистически независимыми. Следовательно, огибающая  $V_1$  будет распределена по закону Райса (см. рис. 5.12):

$$w(V_1 | s_1) = \frac{2V_1}{EN_0} \exp\left(-\frac{V_1^2 + E^2}{EN_0}\right) I_0\left(\frac{2V_1}{N_0}\right). \quad (5.66)$$

Нетрудно показать, что в рассматриваемом случае математические ожидания  $M\{\zeta_1, \zeta_2\}$  и  $M\{\hat{\zeta}_1, \hat{\zeta}_2\}$  равны нулю и, следовательно, случайные величины  $\zeta_1, \hat{\zeta}_1, \zeta_2$  и  $\hat{\zeta}_2$  некоррелированные, а с учетом их гауссовского распределения статистически независимые. Как следствие, случайные величины  $V_1$  и  $V_2$  также независимы. Поэтому вероятность ошибки при передаче сигнала  $s_1(t)$  можно определить как

$$p_{ош}(s_2 | s_1) = \int_0^\infty dV_1 \int_{V_1}^\infty w(V_1, V_2) dV_2 = \int_0^\infty w(V_1) \int_{V_1}^\infty w(V_2) dV_2 dV_1 \quad (5.67)$$

Подставляя (5.65) и (5.66) в (5.67), получаем

$$p_{ош}(s_2 | s_1) = \int_0^\infty \frac{2V_1}{EN_0} \exp\left[-\frac{V_1^2 + E}{EN_0}\right] I_0\left(\frac{2V_1}{N_0}\right) \int_{V_1}^\infty \frac{2V_2}{EN_0} \exp\left(-\frac{V_2^2}{EN_0}\right) dV_2 dV_1. \quad (5.68)$$

Учитывая, что внутренний интеграл равен  $\exp(-V_1^2/EN_0)$ , введем новую переменную  $V = \sqrt{2}V_1$  и вынесем за знак интеграла множитель  $\exp(-E/2N_0)$ . Тогда выражение (5.68) можно записать в виде

$$p_{ош}(s_2 | s_1) = \frac{1}{2} \exp\left(-\frac{E}{2N_0}\right) \int_0^\infty \frac{2V}{EN_0} \exp\left[-\frac{V^2 + E^2/2}{EN_0}\right] I_0\left(\frac{\sqrt{2}V}{N_0}\right) dV. \quad (5.69)$$

Подынтегральное выражение в (5.69) представляет собой закон Райса, а следовательно, интеграл равен 1. Таким образом,

$$p_{ou}(s_2|s_1)=(1/2)\exp(-E/2N_0).$$

Учитывая симметричность канала, вероятность ошибки при передаче сигнала  $s_2(t)$   $p_{ou}(s_1|s_2) = p_{ou}(s_2|s_1)=(1/2)\exp(-E/2N_0)$ . Соответственно средняя вероятность ошибки

$$p_{ou} = p_{ou}(s_2|s_1)=(1/2)\exp(-E/2N_0) = (1/2)\exp(-h^2/2). \quad (5.70)$$

На рис. 5.5 (штриховая линия, ЧМ) показана зависимость  $p_{ou} = f(E/N_0)$ , вычисленная по формуле (5.70). Анализ показывает, что некогерентный прием ортогональных сигналов дает небольшой энергетический проигрыш по сравнению с когерентным приемом. При малых вероятностях ошибки ( $p_{ou}=10^{-4}$ ) он не превышает 1 дБ.

**Системы с пассивной паузой.** В данном случае  $s_1(t) = A_0\cos(\omega_0 t + \varphi)$ ,  $s_2(t)=0$ , где начальная фаза  $\varphi$  представляет собой случайную величину, распределенную равномерно в интервале  $[-\pi, \pi]$ . По-прежнему будем полагать, что  $p_1=p_2 = 0,5$ .

Решение принимается на основе сравнения значения огибающей напряжения на выходе оптимального приемника (например, согласованного фильтра, настроенного на сигнал  $s_1(t)$ ) с некоторым порогом  $U_{\Pi}$ . При превышении порога принимается решение в пользу сигнала  $s_1(t)$ , в противном случае — в пользу сигнала  $s_2(t)$ .

Средняя вероятность ошибки

$$p_{ou} = \frac{1}{2} [p_{ou}(s_2|s_1) + p_{ou}(s_1|s_2)] = \frac{1}{2} \left[ \int_0^{U_{\Pi}} w(V_1 | s_1) dV_1 + \int_{U_{\Pi}}^{\infty} w(V_2 | s_2) dV_2 \right] \quad (5.71)$$

где  $V_1$  и  $V_2$  — значения огибающих напряжений на выходе оптимального приемника в момент  $t=T$  при передаче сигналов  $s_1(t)$  и  $s_2(t)$  соответственно.

Величина  $V_1$  распределена по закону Райса (5.66), а величина  $V_2$  — по закону Рэлея (5.65).

Подставляя распределения огибающих  $V_1$  и  $V_2$  в (5.71), получаем:

$$p_{ou} = \frac{1}{2} \int_0^{U_{\Pi}} \frac{2V_1}{EN_0} \exp\left[-\frac{V_1^2 + E^2}{EN_0}\right] I_0\left(\frac{2V_1}{N_0}\right) dV_1 + \frac{1}{2} \exp\left(-\frac{U_{\Pi}^2}{EN_0}\right). \quad (5.72)$$

Оптимальное значение порога  $U_{\Pi \text{ opt}}$  находится из условия минимизации вероятности ошибки (5.72).

Взяв производную  $dp_{ou}/dU_{\Pi}$  и приравняв ее к нулю, имеем

$$\frac{2U_{\Pi}}{EN_0} \exp\left[-\frac{U_{\Pi}^2 + E^2}{EN_0}\right] I_0\left(\frac{2U_{\Pi}}{N_0}\right) - \exp\left(-\frac{U_{\Pi}^2}{EN_0}\right) \frac{2U_{\Pi}}{EN_0} = 0,$$

или после упрощений

$$I_0(2U_{\Pi}/N_0) = \exp(E/N_0). \quad (5.73)$$

Прологарифмируем (5.73):  $\ln I_0(2U_{\Pi}/N_0) = E/N_0$ . Учитывая, что

$$\ln I_0(x) \approx \begin{cases} x, & x \gg 1 \\ x^2/4, & x \ll 1, \end{cases} \quad (5.74)$$

находим:

$$U_{\Pi \text{ opt}} = E/2 \text{ при больших отношениях сигнал-шум,}$$



$U_{II \text{ opt}} = (EN_0)^{1/2}$  при малых отношениях сигнал-шум. Таким образом, при больших отношениях сигнал-шум

$$p_{ouu} = \frac{1}{2} \int_0^{E/2} \frac{2V_1}{EN_0} \exp\left[-\frac{V_1^2 + E^2}{EN_0}\right] I_0\left(\frac{2V_1}{N_0}\right) dV_1 + \frac{1}{2} \exp\left(-\frac{E}{4N_0}\right) \quad (5.75)$$

При  $E/N_0 \gg 10$  первым слагаемым в (5.75) можно пренебречь. Тогда

$$p_{ouu} \approx \left(\frac{1}{2}\right) \exp\left(-\frac{E}{4N_0}\right). \quad (5.76)$$

На рис. 5.5 (штриховая линия, АМ) показана зависимость  $p_{ouu} = f(E/N_0)$ , рассчитанная по (5.76). Сравнение с соответствующей кривой для когерентного случая позволяет сделать вывод, что при вероятности ошибки  $10^{-3} \dots 10^{-6}$  некогерентный прием проигрывает в энергетике на  $1 \dots 0,5$  дБ.

При неоптимальном пороге вероятность ошибки может оказаться значительно больше, чем (5.76). Поэтому при изменении уровня входящего сигнала порог приходится подстраивать, что является существенным недостатком систем с пассивной паузой.

**M-ичные системы передачи информации.** Пусть принятый сигнал

$$u(t) = s_i(t, \varphi_i) + n(t), \quad i=1, \dots, m,$$

где начальная фаза  $\varphi_i$  представляет собой случайную величину, распределенную равномерно в интервале  $[-\pi, \pi]$ ,  $n(t)$  — помеха типа белого гауссовского шума. Предположим, что сообщения  $s_i(t)$ ,  $i=1, \dots, m$ , равновероятны, т. е.  $p(s_i) = 1/m$ ,  $i=1, \dots, m$ .

Пусть для определенности передается сигнал  $s_i(t)$ . Ошибка возникает тогда, когда неравенство (5.63) не выполняется хотя бы для одного индекса  $r \neq i$ . При произвольной системе сигналов  $s_i(t)$ ,  $i=1, \dots, m$ , выражение для вероятности ошибки найти не удастся. Будем рассматривать только ортогональные в усиленном смысле сигналы с равными энергиями.

В общем виде вероятность правильного приема сигнала

$$p_{np} = \int_0^\infty dV_1 \int_0^{V_1} \dots \int_0^{V_1} w_m(V_1, \dots, V_m) dV_1 \dots dV_m. \quad (5.77)$$

При этом значения огибающих оказываются статистически независимыми и выражение (5.77) можно записать в виде

$$p_{np} = \int_0^\infty dV_1 \int_0^{V_1} \dots \int_0^{V_1} w_1(V_1) \dots w(V_m) dV_1 \dots dV_m \quad (5.78)$$

Как и для двоичной системы, огибающая  $V_i$  распределена по закону Райса (5.66), а значения огибающих  $V_r$ ,  $r=1, \dots, m$ ,  $r \neq i$ , — по закону Рэлея (5.65).

Вероятность ошибки

$$p_{ouu} = 1 - p_{np} \quad (5.79)$$

Используя (5.65), (5.66) и (5.78), находим выражение для вероятности ошибки

$$p_{ouu} = \sum_{n=1}^{m-1} \frac{(-1)^{n+1}}{n+1} C_{m-1}^n \exp\left[-\frac{nE}{(n+1)N_0}\right] \quad (5.80)$$

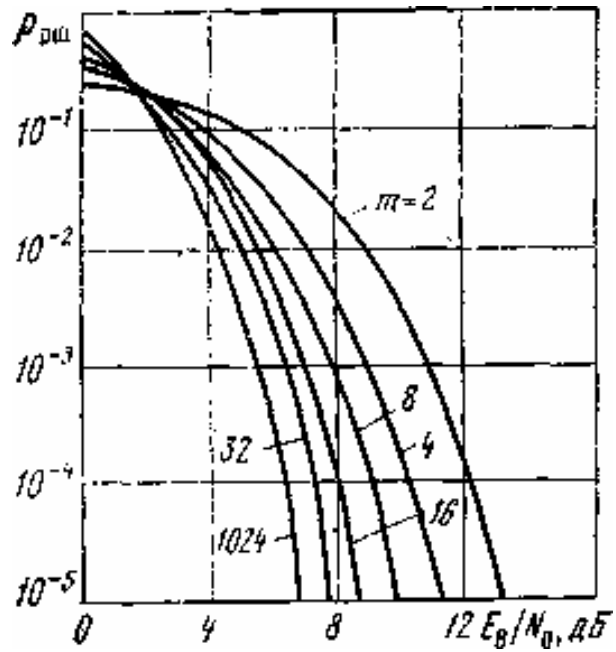


Рис. 5.13. Зависимость вероятности ошибки от отношения  $E_B/N_0$  при некогерентном приеме  $m$  ортогональных сигналов

Из рис. 5.13 видно, что чем больше  $m$ , тем выше помехоустойчивость системы. Сравнение когерентного и некогерентного методов приема показывает, что при  $m=128$  различие в помехоустойчивости пренебрежимо мало.

На практике при  $p_{ош} \ll 1$  часто пользуются верхней границей вероятности ошибки  $p_{ош} < [(m-1)/2] \exp(-E/2N_0)$ , совпадающей с первым членом суммы (5.80).

## Лекция 4. Помехоустойчивость систем цифровой радиосвязи с ОФМ и ЧММС

### 5.4. СИСТЕМЫ ПЕРЕДАЧИ С ОТНОСИТЕЛЬНОЙ ФАЗОВОЙ МОДУЛЯЦИЕЙ

#### 5.4.1. ПРИНЦИП ФОРМИРОВАНИЯ И ПРИЕМ СИГНАЛОВ С ОТНОСИТЕЛЬНОЙ ФАЗОВОЙ МОДУЛЯЦИЕЙ

Как показано в п. 5.2.2, наименьшая вероятность ошибочного приема при  $m=2$  может быть достигнута при использовании фазоманипулированных (на угол  $180^\circ$ ) сигналов:  $s_1(t) = -s_2(t) = s_0(t)$ ,  $0 < t < T$ , причем обычно  $s_0(t) = A_0 \sin(\omega_0 t)$ . Однако практическая реализация демодуляторов ФМ сигналов встречает определенные трудности, связанные с созданием опорного напряжения с неизменной начальной фазой.

В существующих СПИ опорный сигнал формируется из принимаемого сигнала. В системах с ФМ задача затрудняется тем, что при равновероятных сигналах в их спектре отсутствует составляющая на частоте несущей и ее невозможно получить путем фильтрации. В этих случаях приходится применять способы формирования опорного напряжения, основанные на снятии манипуляции принятого сигнала. Примерами соответствующих устройств служат схемы Пистолькорса, Сифорова, Костаса и др.

Однако всем известным схемам формирования опорного сигнала в системах с ФМ присущ одинаковый недостаток: из-за воздействия различных неконтролируемых факторов возможны случайные изменения фазы опорного сигнала на  $\pi$ . При этом даже в отсутствие помех передаваемый символ 1 регистрируется как 0, а передаваемый символ 0 — как 1. Возникает явление, называемое «обратной работой», которое будет продолжаться до следующего случайного скачка фазы опорного сигнала.

Поэтому противоположные сигналы невозможно использовать в режиме обычной ФМ в радиоканалах. Однако существует метод, позволяющий ценой небольшого энергетического проигрыша реализовать в радиоканалах преимущества таких сигналов. Этот метод, предложенный Н.Т. Петровичем и получивший название относительной фазовой модуляции (ОФМ), заключается в том, что полезная информация содержится не в абсолютном значении начальной фазы сигнала, а в разности начальных фаз двух соседних сигналов. Для передачи символа 0 начальная фаза передаваемого колебания сохраняется неизменной по отношению к начальной фазе колебания на интервале длительности предшествующего символа. Для передачи символа 1 начальная фаза излучаемого колебания поворачивается на  $180^\circ$ .

При когерентной обработке сигналов с ОФМ, как и при приеме сигналов с ФМ, прежде всего определяются начальные фазы принятых сигналов, а затем на основе сравнения начальных фаз соседних сигналов принимаются решения о переданных информационных символах. Нетрудно видеть, что в данном случае при каждом случайном скачке фазы опорного

колебания в приемнике будут ошибочно приняты только два символа.

Алгоритм оптимального приема сигналов с ОФМ реализует устройство (рис. 5.14), включающее запоминающее устройство ЗУ любого типа, сохраняющее на время  $T$  информацию о выборочном значении напряжения на выходе интегратора в момент окончания каждого сигнала (аналоговую линию задержки, схему выборки и хранения и т. п.).

Как видно из рис. 5.14, приемное устройство состоит из двух частей, первая из которых (обведена штриховой линией) по существу представляет собой устройство оптимального приема противоположных сигналов. Тогда вероятность ошибочного приема легко определить из следующих соображений. Ошибочная регистрация сигнала в схеме на рис. 5.14 будет происходить в одном из двух возможных случаев: а) ошибочно определена начальная фаза предыдущего сигнала, в то время как начальная фаза последующего определена верно; б) второй сигнал принят ошибочно, а первый — верно. Вероятность каждого из этих несовместимых событий равна  $p_{ош\ фм}(1-p_{ош\ фм})$ , где  $p_{ош\ фм}$  вероятность ошибочного приема сигналов с ФМ, определяемая выражением (5.35). Тогда искомая вероятность ошибочного приема сигналов с ОФМ

$$p_{ош.ОФМ} = 2p_{ош.ФМ}(1-p_{ош.ФМ}) \approx 2p_{ош.ФМ} = 2[1-\Phi((2E/N_0)^{1/2})] = 2[1-\Phi(\sqrt{2}h)] \quad (5.81)$$

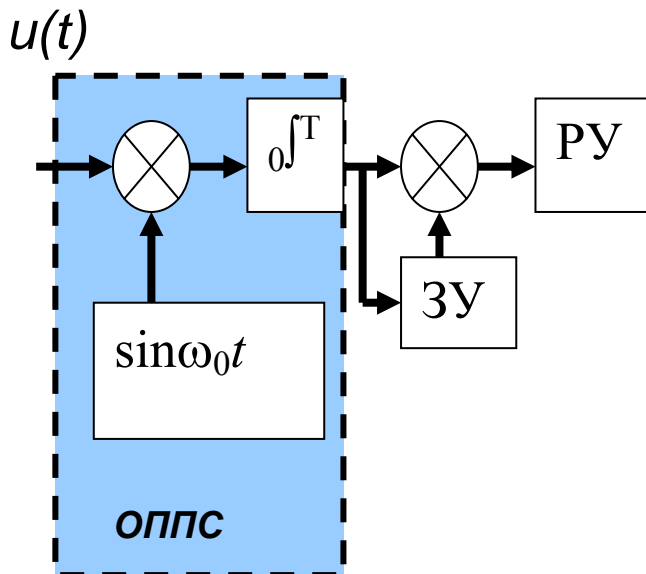


Рис. 5.14. Структурная схема оптимального когерентного демодулятора ОФМ сигналов

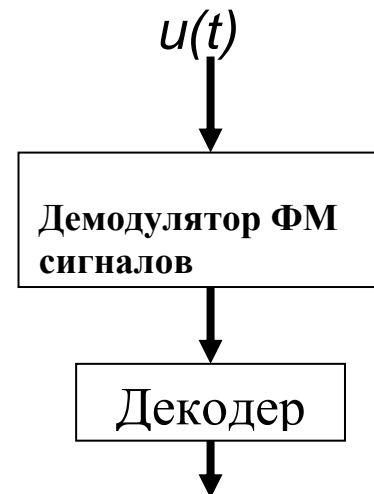


Рис. 5.15. Структурная схема оптимального когерентного демодулятора ОФМ сигналов при дополнительном (разностном) кодировании передаваемых сообщений

Из (5.81) и (5.35) можно определить энергетический проигрыш метода

ОФМ по сравнению с ФМ. Он не превосходит 1 дБ.

Относительную ФМ можно рассматривать как обычную, но при соответствующем дополнительном кодировании передаваемого сообщения. Действительно, если передаваемые символы обозначить  $a_1, a_2, \dots, a_k, \dots$ , то после такого дополнительного кодирования имеем  $b_1, b_2, \dots, b_k, \dots$ . причем совпадение символов  $b_{k-1}$  и  $b_k$  означает передачу исходного символа 0, а в противном случае (символы  $b_{k-1}$  и  $b_k$  различны) — передачу символа 1. Иначе говоря,

$$b_{k-1} \oplus b_k = a_k. \quad (5.82)$$

Отсюда следует, что сигналы с ОФМ можно принимать так же, как и сигналы с ФМ, но с последующим декодированием в декодере ДК в соответствии с правилом (5.82) (рис. 5.15), причем устройства на рис. 5.14 и 5.15 реализуют один и тот же алгоритм оптимального приема сигналов с ОФМ.

При случайной начальной фазе каждого передаваемого сигнала применять ОФМ, строго говоря, невозможно. Однако на практике часто встречается ситуация, когда эта начальная фаза претерпевает достаточно медленные изменения, так что разность начальных фаз двух соседних сигналов можно считать не меняющейся случайным образом ни при излучении, ни в процессе распространения на протяжении времени передачи большого числа информационных символов. В то же время для упрощения приемного устройства само абсолютное значение начальной фазы каждой такой пары сигналов при приеме будем полагать случайным. Тогда можно использовать метод ОФМ, но в сочетании с оптимальной некогерентной обработкой пар последовательно передаваемых сигналов. Каждая такая пара сигналов, рассматриваемая как некоторый эквивалентный сигнал  $s_{r3}(t)$  ( $r=1, 2$ ), либо имеет скачок на  $180^\circ$  начальной фазы второго сигнала относительно первого ( $r=1$ ; передается символ 1), либо не имеет такого скачка ( $r=2$ , передается символ 0).

В этих условиях задача приема сигнала с ОФМ аналогична задаче оптимального некогерентного приема сигналов  $s_{13}(t)$  и  $s_{23}(t)$ . Алгоритм такого приема следует из (5.61): регистрируется сигнал  $s_{13}(t)$  (символ 1), если

$$V_{13} \geq V_{23}, \quad (5.83)$$

$$\text{где } V_{r3} = \sqrt{\left[ \int_{-T}^T u(t) s_{r3}(t) dt \right]^2 + \left[ \int_{-T}^T u(t) s_{r3}(t) dt \right]^2}.$$

Можно показать, что сигналы  $s_{13}(t)$  и  $s_{23}(t)$  ортогональны в усиленном смысле. Следовательно, вероятность ошибочного приема  $P_{ош}$  определяется формулой (5.70):

$$p_{ош} = (1/2) \exp(-h^2/2), \text{ где}$$

$$h^2 = \frac{1}{N_0} \int_{-T}^T s_{13}^2(t) dt = \frac{1}{N_0} \int_{-T}^T s_{23}^2(t) dt = \frac{2E}{N_0} = 2h^2.$$

Таким образом,

$$p_{ош} = 0,5 \exp(-h^2). \quad (5.84)$$

Как видно из сравнения (5.84) и (5.70), применение ОФМ позволяет без снижения скорости передачи информации уменьшать вдвое энергию излучаемых сигналов (вдвое снизить среднюю мощность передатчика) по сравнению с использованием сигналов, ортогональных в усиленном смысле. Иначе говоря, при оптимальном некогерентном приеме сигналов с ОФМ имеется энергетический выигрыш 3 дБ по сравнению с таким же приемом ортогональных в усиленном смысле сигналов. В то же время, сравнивая (5.84) с (5.81), легко убедиться, что вероятность ошибок при оптимальном некогерентном приеме сигналов с ОФМ несколько выше, чем при оптимальном когерентном приеме тех же сигналов, однако это различие очень мало. Соответствующий энергетический проигрыш некогерентного приема не превышает 1 дБ.

#### 5.4.2. МНОГОКРАТНАЯ ОТНОСИТЕЛЬНАЯ ФАЗОВАЯ МОДУЛЯЦИЯ

Ширина спектра последовательности передаваемых сигналов с ОФМ определяется длительностью сигнала  $T$ . Для двоичных сигналов ( $m = 2$ ) величина  $T$  равна длительности  $T_S$  интервала времени, отведенного на передачу одного двоичного информационного символа. Полосу частот, требуемую для передачи сигналов с ОФМ, можно сократить путем перехода к многократной ( $m > 2$ ) ОФМ. При этом исходная последовательность двоичных символов разбивается на блоки по  $\log_2 m$  соседних символов ( $m=4, 8, 16, \dots$ ). Количество возможных комбинаций двоичных символов, соответствующих одному такому блоку, равно  $m$ . Пусть, например, для передачи каждой такой комбинации используется элементарный сигнал в виде отрезка гармонического колебания с той или иной начальной фазой  $\varphi$ . При этом каждой  $i$ -й из возможных  $m$  комбинаций соответствует определенное значение  $\Delta\varphi_i = 2\pi i/m$  разности начальных фаз  $\varphi$  предыдущего и последующего элементарных сигналов ( $i=0, 1, \dots, m - 1$ ). При таком методе модуляции длительность  $T$  сигнала оказывается равной  $T = T_S \log_2 m$ , что приводит к соответствующему сокращению в  $\log_2 m$  полосы занимаемых частот.

Рассмотрим подробнее один из возможных методов формирования сигналов с двукратной ( $m = 4$ ) ОФМ. Разделим исходную последовательность двоичных информационных символов на последовательности четных  $x_{2k}$  и нечетных  $x_{2k+1}$  (по порядку следования) символов. Тогда передаваемое сообщение, состоящее из  $2N+1$  символов, можно представить в виде (рис. 5.16,а — в):

$$x(t) = x_1(t) + x_2(t), \quad (5.85)$$

где

$$x_1(t) = \sum_{k=0}^{k=N-1} \psi(t - 2kT) x_{2k}$$

$$x_2(t) = \sum_{k=0}^{k=N-1} \psi(t - 2kT - T) x_{2k+1}$$

$$\psi(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t < 2T \\ 0, & t \geq 2T, t < 0 \end{cases}$$

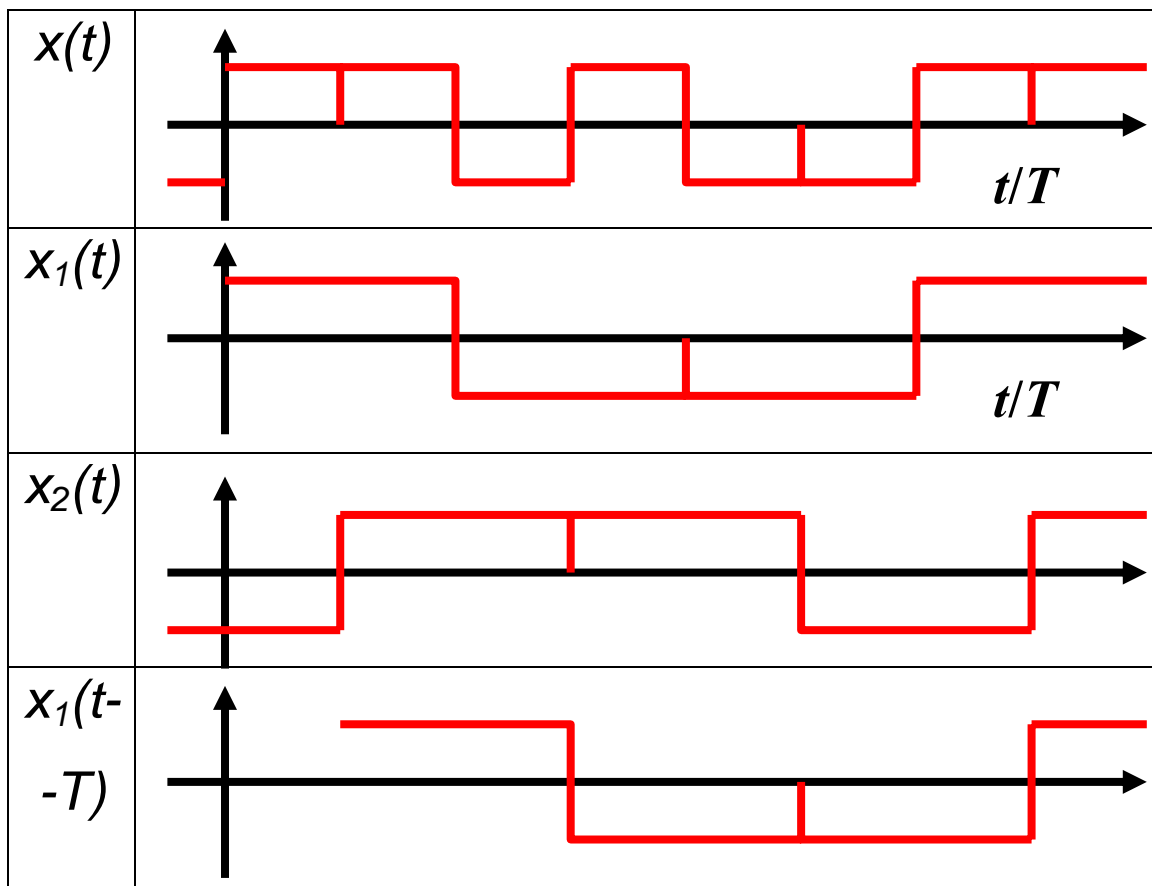
Как было показано в п. 5.4.1, метод ОФМ можно рассматривать как обычную фазовую модуляцию на  $180^\circ$  при условии предварительного перекодирования исходного сообщения. Поэтому для простоты будем считать, что в сообщениях, представленных функциями  $x_1(t)$  и  $x_2(t)$  в (5.85), указанное перекодирование произведено, так что для передачи исходного сообщения теперь необходимо лишь осуществить ФМ на  $180^\circ$  соответствующих высокочастотных колебаний. Для экономии полосы занимаемых частот осуществим отдельно фазовую модуляцию сообщениями  $x_1(t)$  и  $x_2(t)$  двух квадратурных составляющих одного и того же колебания  $\sin(\omega_0 t)$ . При этом последовательность передаваемых сигналов  $y(t)$  представляется в виде суммы

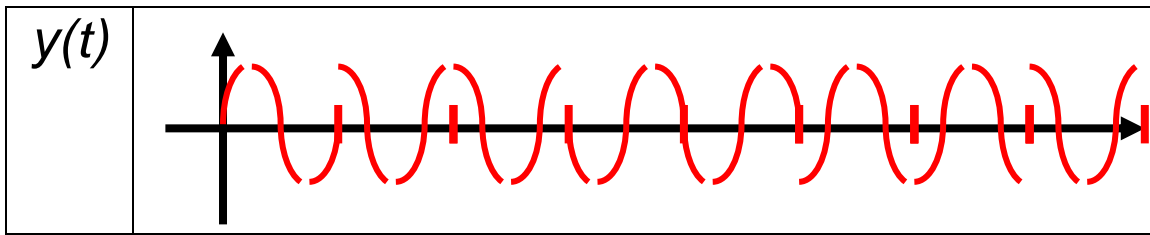
$$y(t) = y_1(t) + y_2(t) = A_0 \sin(\omega_0 t + \varphi) \quad (5.86)$$

где

$$\begin{aligned} y_1(t) &= (A_0/\sqrt{2})x_1(t-T)\sin(\omega_0 t + \pi/4) \\ y_2(t) &= (A_0/\sqrt{2})x_2(t)\cos(\omega_0 t + \pi/4) \end{aligned}$$

Функция  $x_1(t-T)$  показана на рис. 5.16,г. Значения начальной фазы  $\varphi$  колебания  $y(t)$  в (5.86) при различных сочетаниях передаваемых символов  $x_{2k}$  и  $x_{2k+1}$  приведены в табл. 5.3.





Рис, 5.16, Диаграммы формирования сигналов КОФМ

ТАБЛИЦА 5.3

$X_{2k}$	1	1	-1	-1
$X_{2k+1}$	1	-1	1	-1
$\varphi$	$\pi/2$	0	$\pi$	$-\pi/2$

Результирующее колебание (рис. 5.16,д) имеет тот же вид, что и при использовании метода формирования сигналов ОФМ при  $m=4$  путем объединения соседних символов исходного сообщения в блоки по два символа. Именно в силу специфики формирования последовательности сигналов  $y(t)$  в (5.86) метод ОФМ при  $m=4$  часто называют квадратурной ОФМ (КОФМ).

Как видно из табл. 5.3 и рис. 5.16д в колебании  $y(t)$  в моменты  $t=(2k+1)T$  может установиться любое значение начальной фазы  $\varphi$  из возможных  $\pm\pi/2$ , 0 или  $\pi$ . Таким образом, в указанные моменты времени могут иметь место скачки начальной фазы на  $180^\circ$  (как, например, в момент  $t = 7T$  на рис. 5.16,д). При прохождении последовательности таких сигналов через узко полосные фильтры в моменты скачков фазы колебания на  $180^\circ$  возникает глубокая паразитная амплитудная модуляция, приводящая к увеличению пик-фактора сигнала и, как следствие, к дополнительным искажениям при нелинейных режимах усиления.

Для снижения уровня такой паразитной АМ при  $m=4$  разработана модификация метода КОФМ, называемая квадратурной относительной фазовой модуляцией со сдвигом (КОФМС) или офсетной ОФМ. В этом случае колебание  $y(t)$ , в отличие от (5.86), формируется в виде

$$y(t) = y_1(t) + y_2(t) = A_0 \sin(\omega_0 t + \varphi),$$

где

$$\begin{aligned} y_1(t) &= (A_0/\sqrt{2})x_1(t)\sin(\omega_0 t + \pi/4) \\ y_2(t) &= (A_0/\sqrt{2})x_2(t)\cos(\omega_0 t + \pi/4), \end{aligned} \quad (5.87)$$

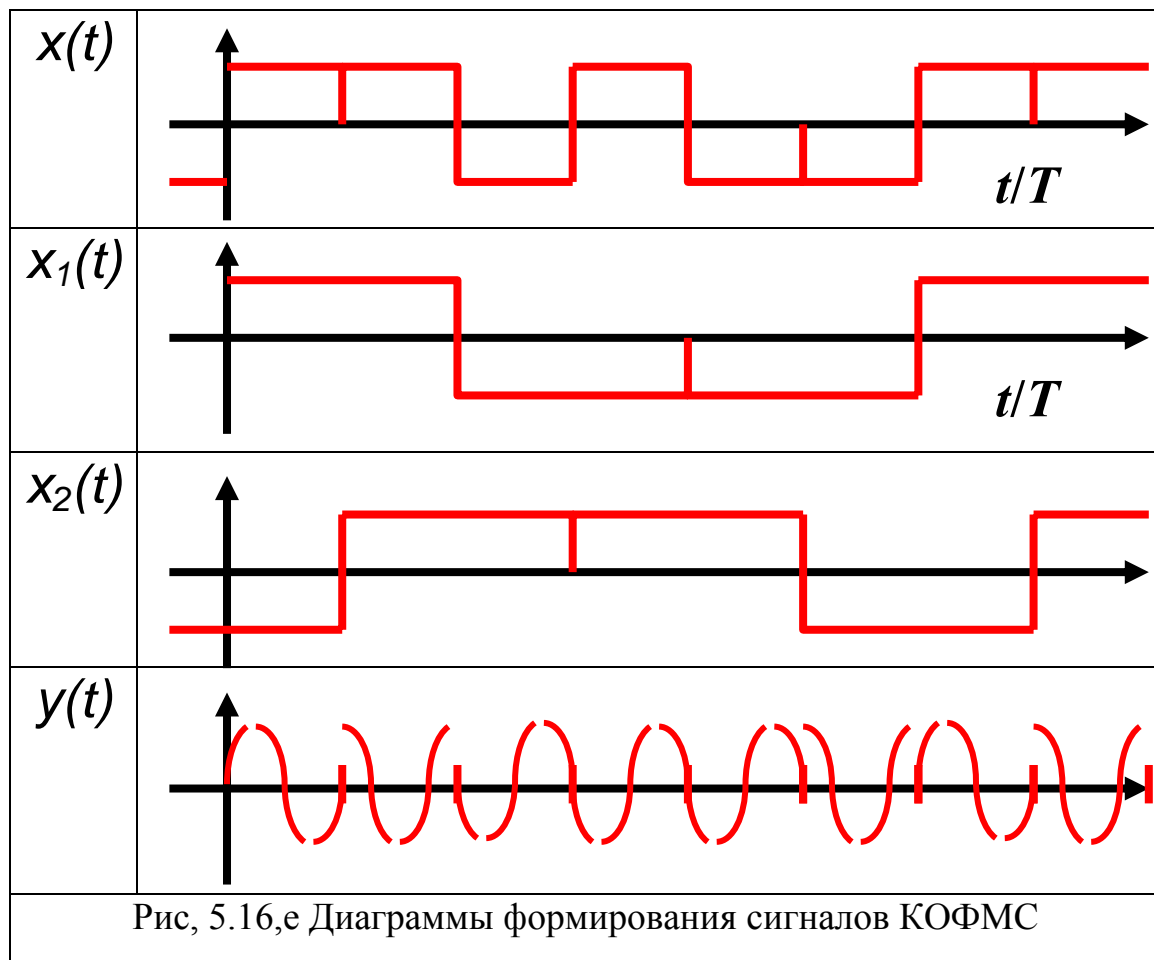
Как видно из (5.85) и (5.87), а также из рис. 5.16,б и в, знак любой из функций  $x_1(t)$  или  $x_2(t)$  может меняться лишь в те моменты, когда значение другой функции сохраняется неизменным. Такой сдвиг по времени моментов возможной смены знака модулирующих последовательностей (чем и обусловлено название метода модуляции) приводит к существенному отличию результирующего колебания  $y(t)$  (рис. 5.16,е) при КОФМС по



сравнению с КОФМ. В табл. 5.4 приведены значения начальной фазы  $\varphi$  колебания  $y(t)$  в (5.87) для различных сочетаний последовательно переданных нечетных символов  $x_{2k-1}$ ,  $x_{2k+1}$  и соответствующего четного символа  $x_{2k}$ . Здесь же указаны значения скачка начальной фазы  $\varphi$  в момент появления очередного нечетного информационного символа. Очевидно, что подобная картина будет иметь место и в моменты появления очередного четного символа, когда неизменным оказывается значение функции  $x_2(t)$ .

ТАБЛИЦА 5.4

$x_k$	1		1		1		1		-1		-1		-1		-1	
$x_{k-1}$	1	1	1	-1	-1	1	-1	-1	1	1	1	-1	-1	1	-1	-1
$x_{k+1}$																
$\varphi$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$	0	0	$\frac{\pi}{2}$	0	0	$\pi$	$\pi$	$\pi$	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{2}$	$\pi$	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{2}$
$\Delta\varphi$	0		$-\frac{\pi}{2}$		$\frac{\pi}{2}$		0		0		$\frac{\pi}{2}$		$-\frac{\pi}{2}$		0	

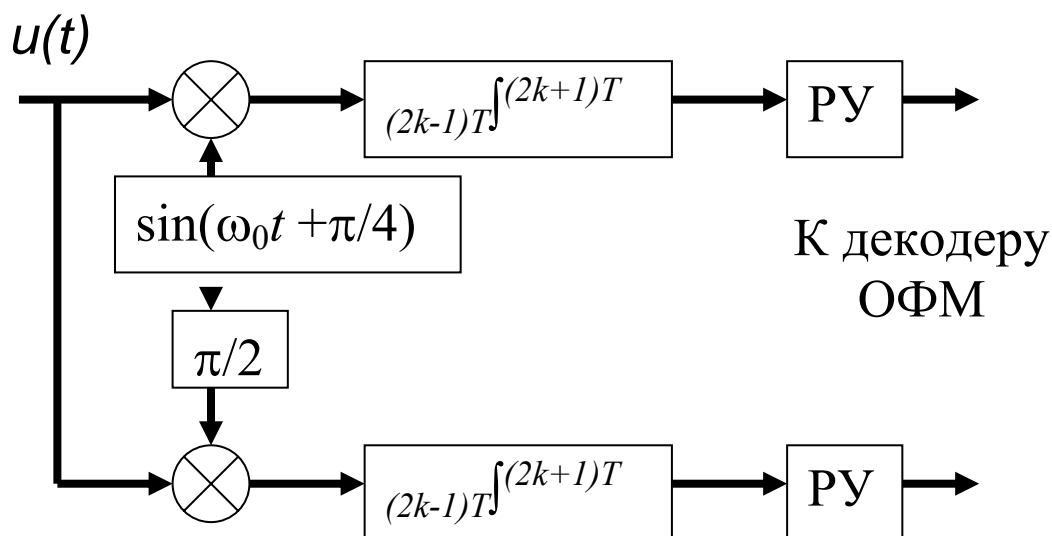


Как следует из табл. 5.4 и рис. 5.16,е, скачки начальной фазы  $\varphi$

колебания  $y(t)$  возможны лишь на  $\pm\pi/2$ , что снижает паразитную амплитудную модуляцию при прохождении сигнала через полосовые цепи. Заметим, что длительность сигнала с КОФМС равна длительности  $T$  исходного информационного символа, т. е. вдвое меньше, чем при КОФМ. Однако это не приводит к расширению спектра последовательности  $y(t)$  по сравнению с использованием КОФМ. Последнее объясняется тем, что ширина спектра колебания  $y(t)$  определяется шириной спектра квадратурных составляющих  $y_1(t)$  и  $y_2(t)$  в (5.87), которая остается той же, что и при КОФМ (5.86).

При приеме сигналов как с КОФМ, так и с КОФМС можно воспользоваться тем, что составляющие  $y_1(t)$  и  $y_2(t)$  суммарной последовательности  $y(t)$  сдвинуты на  $90^\circ$  по фазе высокочастотного заполнения, а сообщения  $x_1(t)$  и  $x_2(t)$  независимы. В этих условиях при наличии в демодуляторе генераторов непрерывных колебаний  $\sin(\omega_0 t + \pi/4)$  и  $\cos(\omega_0 t + \pi/4)$  легко осуществить отдельный прием каждой из составляющих  $y_1(t)$  и  $y_2(t)$  в соответствии с алгоритмом оптимального когерентного приема сигналов с ОФМ. Действительно, рассмотрим устройство на рис. 5.17. При поступлении на его вход колебания  $y(t)$  вида (5.86) вклад составляющей  $y_2(t)$  в выходном напряжении интегратора верхнего канала в моменты  $t = (2k+1)T$  оказывается порядка пренебрежимо малых значений интеграла от быстро осциллирующей (с частотой  $2\omega_0$ ) функции. Таким образом, верхний канал схемы на рис. 5.17 представляет собой демодулятор двоичных сигналов с ОФМ (рис. 5.16), содержащих информацию о сообщении  $x_1(t)$ . Аналогично нижний канал выполняет функции демодулятора двоичных сигналов с ОФМ, составляющих последовательность  $y_2(t)$  и содержащих информацию о сообщении  $x_2(t)$ .

Так же строится устройство приема сигнала с КОФМС, когда последовательность  $y(t)$  имеет вид (5.87). В этом случае необходимо лишь изменить интервал интегрирования в верхнем канале схемы на рис. 5.17, установив его равным  $[2kT \ 2(k+1)T]$ .



Рис, 5.17. Оптимальный демодулятор КОФМ(С) (раздельный прием квадратур)

Рассмотрим помехоустойчивость приема сигналов с КОФМ и КОФМС. Поскольку, как было показано, возможен раздельный прием четных и нечетных символов сообщения  $x(t)$ , искомая вероятность ошибочного приема совпадает с вероятностью ошибок при оптимальном когерентном приеме сигналов с ОФМ, составляющих любую из последовательностей  $y_1(t)$  или  $y_2(t)$ . Средняя мощность этих сигналов, как видно из (5.86) и (5.87), вдвое меньше средней мощности последовательности  $y(t)$  сигналов с КОФМ или КОФМС, однако их длительность вдвое превышает длительность  $T$  интервала времени, отводимого на передачу одного информационного двоичного символа сообщения  $x(t)$  (см. рис. 5.16). Поэтому энергия каждого из рассматриваемых сигналов, составляющих последовательности  $y_1(t)$  и  $y_2(t)$ , совпадает с энергией сигнала, передающего исходное сообщение  $x(t)$  методом двоичной ОФМ при тех же энергетических затратах (например, при той же средней мощности передатчика). Следовательно, искомая вероятность ошибочного приема сигналов как с КОФМ, так и с КОФМС определяется выражением (5.81):

$$p_{ош.} = 2[1 - \Phi(\sqrt{2h})]$$

где

$$h^2 = \frac{1}{2} \left( \frac{A_0}{\sqrt{2}} \right)^2 \frac{2T}{N_0} = \frac{A_0^2 T}{2N_0}.$$

Таким образом, при переходе от двоичной ОФМ к КОФМ или КОФМС примерно вдвое сужается полоса занимаемых частот без снижения помехоустойчивости приема, причем метод КОФМС обеспечивает снижение уровня паразитной амплитудной модуляции при прохождении сигналов через частотно-избирательные цепи.

Дальнейшее увеличение основания используемого алфавита  $m$ , т. е. выбор  $m=8, 16, \dots$  приводит, наряду с сокращением в  $\log_2 m$  раз полосы занимаемых частот, к существенному снижению помехоустойчивости приема. Поэтому в реальных системах метод многократной ОФМ при  $m > 8$  используется лишь тогда, когда обеспечен большой запас энергии полезного сигнала.

## 5.5. СИСТЕМЫ ПЕРЕДАЧИ ЧАСТОТНО-МОДУЛИРОВАННЫХ СИГНАЛОВ С НЕПРЕРЫВНОЙ ФАЗОЙ

Как отмечалось в п. 5.4.2, ширина спектра колебания  $y(t)$  в (5.86) и (5.87) определяется видом квадратурных составляющих  $y_1(t)$ ,  $y_2(t)$ . Поэтому спектр сигнала с КОФМС можно сузить, если ввести вспомогательную амплитудную модуляцию этих квадратурных составляющих, позволяющую уменьшать значение огибающих колебаний  $y_1(t)$  и  $y_2(t)$  в моменты скачков фазы этих колебаний на  $180^\circ$ . С учетом требования отсутствия амплитудной

модуляции в колебании  $y(t)$  оказывается удобным указанную вспомогательную амплитудную модуляцию квадратурных составляющих осуществить по гармоническому закону:

$$\begin{aligned} y_1(t) &= Y_1(t) \sin \omega_0 t = A_0 x_1(t) \sin(\pi t / 2T) \sin \omega_0 t \\ y_2(t) &= Y_2(t) \cos \omega_0 t = A_0 x_2(t) \cos(\pi t / 2T) \cos \omega_0 t \end{aligned} \quad (5.88)$$

Функции  $A_0 x_1(t) \sin(\pi t / 2T)$ ,  $y_1(t)$ ,  $A_0 x_2(t) \cos(\pi t / 2T) \cos \omega_0 t$  и  $y_2(t)$  показаны на рис. 5.18,а — г для информационной последовательности  $x(t)$ , изображенной на рис. 5.16,а. Как видно из (5.88) и рис. 5.16,б, знак функции  $x_1(t)$  может меняться лишь в моменты равенства нулю огибающей квадратурной составляющей  $y_1(t)$ , причем огибающая квадратурной составляющей  $y_2(t)$  в эти моменты времени достигает максимального значения. Соответственно функция  $x_2(t)$  может изменять свой знак лишь в моменты равенства нулю огибающей квадратурной составляющей  $y_2(t)$ . Этим обеспечивается непрерывность фазы суммарного колебания  $y_2(t)$  в моменты смены информационных символов, причем на каждом  $i$ -м интервале времени  $[iT, (i+1)T]$  колебание  $y(t)$  имеет постоянную огибающую и одну из двух возможных частот  $\omega_0 \pm \pi / 2T$ . Действительно, как следует из (5.88), на рассматриваемом  $i$ -м интервале времени

$$y(t) = A_0 \cos[\omega_0 t + \varphi(t)], \quad (5.89)$$

где  $\varphi(t) = b_i(t) \pi t / 2T + \varphi_i$ , причем  $b_i(t) = \pm x_1(t)x_2(t)$ , а фаза  $\varphi_i$  принимает значения 0 или  $\pi$ , когда функция  $x_2(t)$  равна 1 или  $-1$  соответственно.

Таким образом, при условии (5.88) колебание  $y(t)$  представляет собой последовательность сигналов с частотной модуляцией (ЧМ) и непрерывной фазой. В отличие от обычной двоичной ЧМ, когда разнос частот выбирается кратным  $1/T$ , в данном случае разнос частот существенно меньше и равен  $1/2T$ , что и обусловило название этого метода — частотная модуляция с минимальным сдвигом (ЧММС).

Закон изменения фазы  $\varphi(t)$  колебания (5.89) и сам вид колебания  $y(t)$  для последовательности информационных символов, изображенной на рис. 5.16,а, показаны на рис. 5.18,д, е для  $\omega_0 = 2\pi/T$ . Заметим, что, как следует из (5.89), мгновенная частота колебания  $y(t)$  на  $i$ -м интервале времени зависит не от значения  $x_i$  передаваемого  $i$ -го информационного символа, а от знака произведения  $x_{i-1}x_i$ .

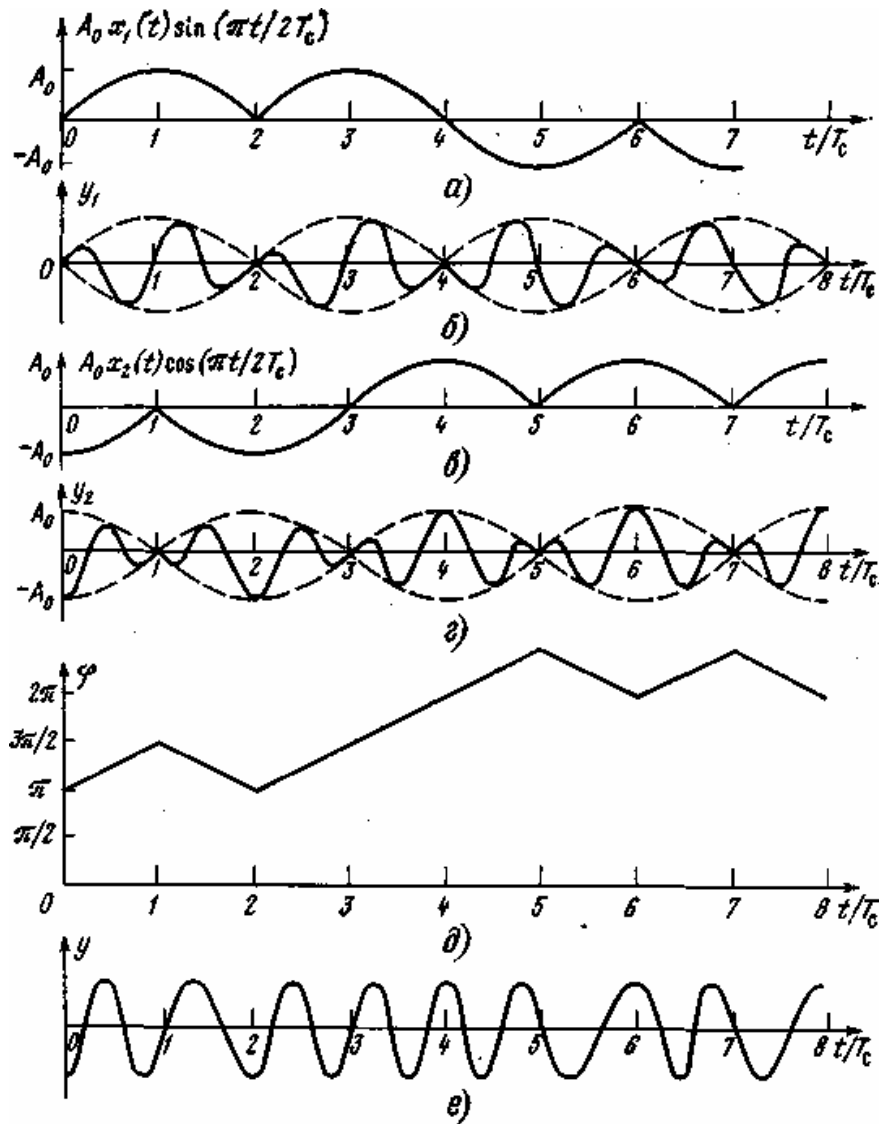


Рис. 5.18. Диаграммы формирования частотно-модулированных сигналов с непрерывной фазой

Рассмотренный метод формирования сигналов с ЧММС называется квадратурным. Возможен и иной метод формирования таких сигналов, когда частота каждого сигнала на интервале длительности  $T$  определяется непосредственно передаваемым в этот момент символом сообщения. Такой метод будем называть прямым. При этом на интервале  $[kT, (k+1)T]$  сигнал имеет вид

$$y(t) = A_0 \cos[\omega_0 t + \varphi(t)],$$

$$\varphi(t) = \frac{\pi}{2} \sum_{i=0}^{k-1} x_i + x_k \frac{\pi}{2T} (t - kT)$$

Спектр последовательности сигналов с ЧММС не зависит от того, как вводится полезная информация в квадратурные составляющие, сигнала: отдельно или путем непосредственной манипуляции частоты сигнала в соответствии с передаваемыми информационными символами.

Сигналы с ЧММС являются частным случаем ЧМ сигналов, с непрерывной фазой (ЧМНФ). На интервале  $[kT, (k+1)T]$  такой сигнал

представляется в виде

$$y(t) = A_0 \cos \left[ \omega_0 t + x_k \frac{\pi v}{T} (t - kT) + \pi v \sum_{i=0}^{k-1} x_i \right], \quad (5.90)$$

где *индекс модуляции*  $v$ , вообще говоря, не обязательно выбирается равным  $0,5$ , как для сигнала с ЧММС. Однако существенное увеличение значения  $v$  (до единицы и более) приводит как к расширению спектра сигнала, так и к снижению помехоустойчивости при приеме. В частности, при выборе  $v = 1$  выражение (5.90) описывает последовательность ортогональных в усиленном смысле сигналов с частотной модуляцией, спектр которых шире, чем при ЧММС.

Для оценки потенциальных возможностей метода ЧММС рассмотрим когерентный прием, когда можно полностью разделить квадратурные составляющие  $y_1(t)$  и  $y_2(t)$ , как при приеме сигналов с КОФМ или КОФМС. При независимых информационных последовательностях  $x_1(t)$  и  $x_2(t)$  четных и нечетных элементов исходного сообщения  $x(t)$  задача оптимального когерентного приема сигналов с ЧММС сводится по существу к задаче отдельной оптимальной обработки последовательностей  $x_1(t)$  и  $x_2(t)$  вида (5.88).

Рассмотрим в качестве примера оптимальный когерентный прием последовательности элементов сообщения  $x_1(t)$ , содержащихся в  $y_1(t)$ . Как следует из (5.85) и (5.88), длительность интервала анализа при приеме каждого сигнала равна  $2T$ , так что алгоритм оптимального приема  $2k$ -го (по порядку следования) элемента сообщения с учетом (5.27) имеет вид: регистрируется символ  $\alpha_l$ , если для всех  $r \neq l$

$$\alpha_l \int_{2kT}^{2(k+1)T} u(t) \sin \frac{\pi t}{2T} \sin \omega_0 t dt \geq \alpha_r \int_{2kT}^{2(k+1)T} u(t) \sin \frac{\pi t}{2T} \sin \omega_0 t dt. \quad (5.91)$$

Учитывая, что  $\alpha_1 = -\alpha_2$ , неравенство (5.91) можно представить в форме

$$\alpha_l \int_{2kT}^{2(k+1)T} u(t) \sin \frac{\pi t}{2T} \sin \omega_0 t dt \geq 0, \quad l = 1, 2. \quad (5.92)$$

Точно так же для приема сигналов, составляющих последовательность  $y_2(t)$ , легко получить следующий алгоритм: регистрируется символ  $\alpha_l$ , если

$$\alpha_l \int_{(2k+1)T}^{(2k+3)T} u(t) \cos \frac{\pi t}{2T} \cos \omega_0 t dt \geq 0, \quad l = 1, 2. \quad (5.93)$$

Устройство, реализующее алгоритмы (5.92) и (5.93) на основе принципа корреляционной обработки (рис. 5.19), должно содержать генераторы опорных колебаний  $y_{0s}(t)$  и  $y_{0c}(t)$  вида

$$\begin{aligned} y_{0s}(t) &= \sin(\pi t / 2T) \sin \omega_0 t \\ y_{0c}(t) &= \cos(\pi t / 2T) \cos \omega_0 t \end{aligned}$$

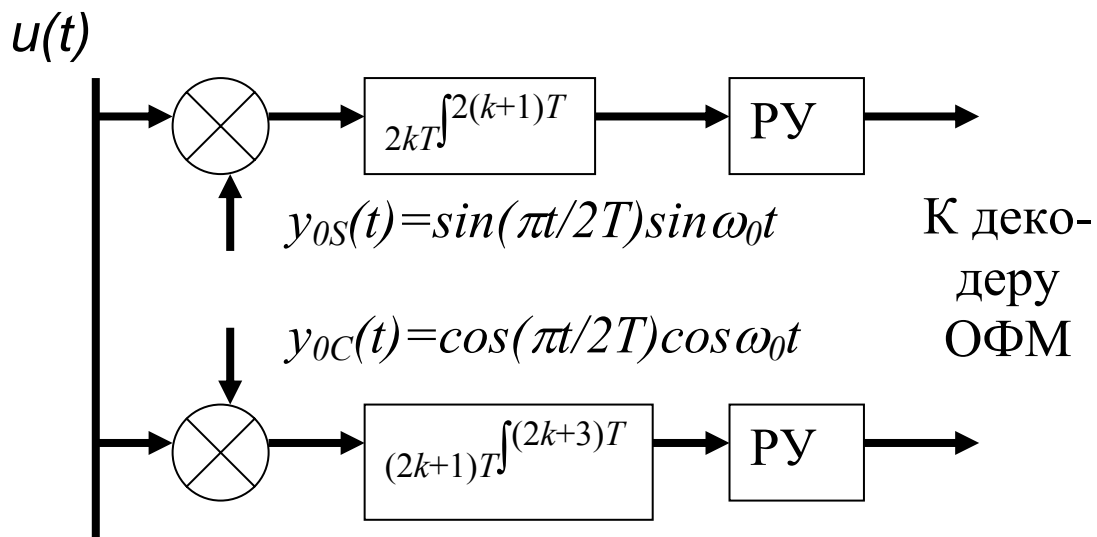


Рис. 5.19. Структурная схема оптимального демодулятора сигналов с ЧММС

Заметим, что на выходе интегратора верхнего канала схемы в момент окончания интегрирования напряжение  $q_{12}(t)$ , обусловленное последовательностью  $y_2(t)$ , определяется пренебрежимо малым значением интеграла от быстро осциллирующей (с частотой  $2\omega_0$ ) функции:

$$q_{12}(2kT + 2T) = \int_{2kT}^{2(k+1)T} y_2(t) y_{0s}(t) dt = \frac{A_0}{4} \int_{2kT}^{2(k+1)T} x_2(t) \sin \frac{\pi}{T} \sin 2\omega_0 t dt.$$

Точно так же пренебрежимо малым оказывается значение напряжения, обусловленного последовательностью  $y_1(t)$ , на выходе интегратора нижнего канала схемы. Таким образом, действительно в устройстве на рис. 5.19 осуществляется раздельная демодуляция последовательностей  $y_1(t)$  и  $y_2(t)$  (5.88).

Определим вероятность ошибочного приема сигналов с ЧММС. Так же, как и при использовании КОФМ или КОФМС, эта вероятность равна вероятности ошибочного приема сигналов, составляющих любую из последовательностей  $y_1(t)$  или  $y_2(t)$  в (5.88). При этом каждая из них представляет собой последовательность сигналов с двоичной ОФМ и средней мощностью, вдвое меньшей средней мощности суммарного колебания  $y(t)$ . Однако длительность интервала анализа в соответствии с (5.92) вдвое превышает длительность  $T_S$  интервала времени передачи одного информационного символа. Поэтому энергия обрабатываемого сигнала, на основе которого принимается решение, например, об очередном символе  $x_{2k}$ , оказывается равной энергии сигнала при передаче сообщения  $x(t)$  методом двоичной ОФМ при тех же общих энергетических затратах. Тогда и вероятность ошибок при оптимальном когерентном приеме сигналов с ЧМСС совпадает с вероятностью ошибочного приема сигналов с двоичной ОФМ, определяемой выражением (5.81). Напомним, что такая же помехоустойчивость реализуется при оптимальном когерентном приеме сигналов с КОФМ и КОФМС. Однако сигналы с ЧММС имеют существенно

более высокую скорость спада внеполосных излучений — порядка  $1/(\Delta f)^4$  против  $1/(\Delta f)^2$  при: КОФМ и КОФМС, где  $\Delta f$  — отстройка от центральной частоты.

### **ВЫВОД ПО ЛЕКЦИИ:**

Выбор системы сигналов (синтез пары "сигнал – фильтр") проводится с учетом характеристик СПИ по помехоустойчивости, пропускной способности, занимаемой полосе частот, уровню взаимных помех (для многоканальных и многостанционных систем), сложности (энергопотребления, габаритов, веса) аппаратуры и пр. Решение этой задачи является одним из определяющих структуру и показатели качества систем передачи дискретной информации факторов.