

Дискретное преобразование Фурье

Цель работы: изучить основные свойства дискретного преобразования Фурье (ДПФ) и способы его реализации в системе MATLAB, в том числе быстрые алгоритмы (БПФ), научиться применять ДПФ для вычисления спектральных характеристик дискретных сигналов, частотных характеристик и выходных сигналов дискретных линейных систем с постоянными параметрами.

1. Задания и методические указания по выполнению работы

1. Создайте в MATLAB программу, вычисляющую ДПФ $X(k)$, $k = 0, \dots, N-1$ дискретного сигнала конечной длины $x(n)$, $n = 0, \dots, N-1$.

Используя эту программу, вычислите ДПФ прямоугольного импульсного сигнала

$$x(n) = \begin{cases} 1, & 0 \leq n \leq 15; \\ 0, & \text{при других } n \end{cases}$$

с а) $N = 16$, б) $N = 32$, в) $N = 64$, г) $N = 128$, д) $N = 256$. Полагая, что период образования отсчетов $x(n)$ сигнала равен 0.2 секунд, найдите (в единицах измерения аналоговых частот, Гц) частотный шаг между соседними точками ДПФ для случаев а) – д). Отобразите графически модули полученных комплексных ДПФ функций (амплитудно-частотные спектры), используя stem представление.

Объясните, что происходит с амплитудно-частотными спектрами при введении все большего числа нулевых отсчетов в последовательность $x(n)$ (дополнение ее нулями).

2. Используйте стандартную MATLAB программу `fft`, реализующую быстрый алгоритм вычисления ДПФ (быстрое преобразование Фурье – БПФ), для оценки модулей комплексных ДПФ функций (амплитудно-частотные спектры) последовательностей, соответствующих случаям а) – д) задания №1. Сравните результаты прямого вычисления ДПФ, выполненного в задании №1, и результаты вычисления БПФ для каждого случая.

3. Создайте сигнал конечной длительности

$$x(n) = e^{j2\pi f_1 n} + e^{j2\pi f_2 n}, \quad 0 \leq n \leq M-1,$$

где $f_1 = 0.2$, $f_2 = 0.25$ с различным числом отсчетов: а) $M = 5$, б) $M = 10$, в) $M = 20$, г) $M = 40$, д) $M = 80$.

Используя стандартную MATLAB программу `fft`, получите N –точечное ДПФ этого сигнала при $N = 1024$. Перед вычислением БПФ исходная последовательность должна быть дополнена $N-M$ нулями для формирования N –точечной входной последовательности. При использовании функции

`fft(x, N)` в форме, содержащей параметр N – объем БПФ, дополнение нулями вектора сигнала до размера N выполняется автоматически. Отобразите графически модули полученных комплексных ДПФ функций для случаев а) – д). Объясните эволюцию амплитудно-частотных спектров при изменении длительности сигнала от а) до д).

4. Создайте отрезок гармонического сигнала

$$s(n) = \begin{cases} \cos(2\pi f_0 n), & 0 \leq n \leq 30; \\ 0, & \text{при других } n \end{cases}$$

при $f_0 = 0.2$.

Используя условие согласования фильтра с сигналом $h(n) = s(M - n)$, где число M больше или равно длине сигнала, создайте импульсную характеристику фильтра, согласованного с заданным сигналом.

Используя стандартную MATLAB программу `fft`, получите N –точечное ДПФ сигнала $s(n)$ и импульсной характеристики фильтра $h(n)$ при $N = 1024$.

Отобразите графически модули и аргументы полученных комплексных ДПФ функций. Сравните амплитудно-частотный и фазо-частотный спектры сигнала соответственно с амплитудно-частотной (АЧХ) и фазо-частотной характеристиками (ФЧХ) согласованного фильтра.

Поскольку результаты вычисления аргумента (фазы) комплексного числа всегда лежат в диапазоне $\pm 180^\circ$, восприятие истинной ФЧХ затрудняют многочисленные «фиктивные» скачки ФЧХ, величина которых составляет 360° . Избавиться от лишних разрывов позволяет стандартная MATLAB функция `unwrap`, которая ищет в переданном ей векторе фазы скачки между соседними элементами, превышающие заданную пороговую величину (по умолчанию равную π), и сдвигает соответствующие фрагменты вектора на $\pm 2\pi$ нужное число раз.

Вычислите выходной сигнал фильтра при подаче на вход сигнала $s(n)$, с которым согласован фильтр, путем вычисления «быстрой» свертки, т.е. обратного ДПФ произведения ДПФ сигнала $s(n)$ и импульсной характеристики фильтра $h(n)$. Для вычисления обратного ДПФ используйте стандартную MATLAB программу `ifft`. Визуализируйте результат фильтрации и определите момент, в который образуется пик выходного сигнала. Объясните полученные результаты.

5. Создайте две последовательности конечной длины

$$x(n) = 1, \quad 0 \leq n \leq 9$$

и

$$y(n) = 2, \quad 0 \leq n \leq 99.$$

Создайте программу вычисления их «быстрой» свертки $z(n)$ по методу перекрытия с суммированием путем секционирования длинной последовательности. Сравните результат вычисления «быстрой» свертки с прямым ее вычислением.

Используя стандартную MATLAB программу `fftfilt`, реализующую вычисление «быстрой» свертки по методу перекрытия с суммированием, вычислите свертку исходных последовательностей. Сравните результаты вычисления «быстрой» свертки Вашей программой и стандартной MATLAB программой.

6. Вычислите ДПФ дискретного ЛЧМ сигнала, полученного из аналогового сигнала

$$s(t) = A \cos(2\pi F_0 t + \pi b \cdot t^2), t \in [t_0, t_1]$$

где $b = (F_1 - F_0)/(t_1 - t_0)$, амплитуда $A = 1$, начальная частота $F_0 = 10$ Гц, конечная частота $F_1 = 100$ Гц, $t_0 = 0$, $t_1 = 1$ с.,

взятием отсчетов с частотой дискретизации $F_0 = 1000$ Гц.

Отобразите графически амплитудно-частотный и фазо-частотный спектры сигнала в диапазоне частот $f \in (0, 500)$ Гц. Объясните полученные результаты.

2. Требования к отчету

В отчет по работе включите тексты программ, реализующих задания, рисунки, отображающие их выполнение, и Ваш комментарий к ним с ответами на поставленные вопросы.